

Лекция Список основных вопросов по курсу.

- Постановка задачи оптимального быстродействия для линейной управляемой системы.
- Экспоненциал и его основные свойства. Формула Коши.
- Множество достижимости, множество управляемости. Их представление и основные свойства.
- Опорные функции и их связь с представлениями выпуклых множеств. Условие непустоты пересечения выпуклых множеств в терминах их опорных функций.
- Непрерывная зависимость опорной функции от ее аргументов. Хаусдорфово расстояние.
- Теорема об опорной функции интеграла. Свойства интеграла.
- Сопряжённая переменная; опорная функция множеств достижимости и управляемости на сопряжённой переменной; эквивалентная формулировка принципа максимума в терминах опорной функции множеств достижимости и управляемости.
- Принцип максимума Л.С.Понтрягина как необходимое условие оптимальности. Геометрическая интерпретация.
- Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности.
- Понятие локальной управляемости и достаточные условия оптимальности.
- Локальная управляемость в начало координат. Лемма о внутренней точке интеграла. Достаточные условия локальной управляемости в начало координат. Достаточные условия оптимальности в начало координат.
- Теорема существования оптимального управления.
- Простейшие задачи синтеза.
- Управляемость. Теорема об управляемости (необходимые, достаточные условия).
- Линейная задача быстродействия с гладкой областью управления. Численные методы её решения.

Лекция Список вопросов к экзамену по курсу.

- Постановка задач математической теории оптимального управления и основные вопросы этой теории. Задача быстродействия.
- Задача оптимального быстродействия для линейных управляемых систем. Множества достижимости и управляемости.
- Экспоненциал: определение и основные свойства. Представление экспоненциала e^{tA} в виде конечной суммы.
- Формула Коши и представление множеств достижимости и управляемости для линейных управляемых систем. Операции над множествами в евклидовом пространстве (линейные преобразования суммы).
- Выпуклые множества. Наименьшая выпуклая оболочка множества; её существование и представление.
- Опорные функции ограниченных множеств. Определение и основные свойства опорной функции.
- Непрерывность опорной функции.
- Совпадение опорных функций данного множества и его наименьшей выпуклой оболочки.
- Восстановление наименьшей выпуклой оболочки компакта по его опорной функции. Связь между опорными функциями данного компакта и его компактного подмножества.
- Условия непустоты пересечения компактов в терминах их опорных функций.
- Расстояние Хаусдорфа между множествами и его выражение в терминах опорных функций.
- Интегральное преобразование класса допустимых управлений. Теорема об опорной функции интеграла (внесение знака опорной функции под знак интеграла).
- Формулировка трех теорем об интегралах в случае интегрирования линейного непрерывного преобразования класса допустимых управлений. Доказательство теоремы о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела.
- Множества достижимости и управляемости линейной управляемой системы. Их опорные функции. Непрерывная зависимость этих множеств от времени.
- Сопряжённое уравнение: представление его решения. Лемма о сопряжённой переменной и множествах достижимости и управляемости. Характер зависимости от времени опорной функции множества достижимости.
- Управляемость. Теорема об управляемости (необходимые, достаточные условия). Основная лемма (условие управляемости в случае $t_1 - t_0 = \min$ при выполнении предположений выпуклости).
- Принцип максимума Л.С.Понтрягина как необходимое условие оптимальности в линейной задаче быстродействия. Геометрическая интерпретация.
- Эквивалентная формулировка принципа максимума в терминах множеств достижимости и управляемости. Геометрическая интерпретация.
- Теорема о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума с усиленными условиями трансверсальности.
- Понятие локальной управляемости. Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума с условием локальной управляемости.
- Лемма о внутренней точке интеграла. Достаточные условия локальной управляемости для линейной задачи быстродействия в начало координат.
- Теорема существования оптимального управления.
- Понятие о задаче синтеза на примере объектов:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а. } \ddot{y} = v, \\ \text{б. } \ddot{y} + y = v, \\ \text{в. } \ddot{y} - y = v. \end{array} \right\} y, v \in E^1; \quad |v| \leq 1; \quad y(0) = a, \dot{y}(0) = b; \quad y(t_1) = 0, \dot{y}(t_1) = 0; \quad t_1 \rightarrow \min.$$

- Операции над множествами в евклидовом пространстве; линейные преобразования, суммы, объединения. Опорные функции преобразованных множеств.
- Численные методы решения линейной задачи быстродействия с гладкой областью управления. Метод продолжения по параметру, метод проектирования начального состояния на изохрону. Уточнение решения методом Ньютона.

Лекция 1

§ 1. Постановка математических задач оптимального управления

1.1. Управляемый объект и его динамика

Мы постоянно встречаемся с управляемыми объектами, к числу которых относятся, например, автомобиль, корабль, летательный аппарат, технологический процесс на производстве и т.п. У всех этих объектов есть органы управления ("рули"), изменением положения которых можно влиять на движение объекта. Возникает вопрос о том, как управлять объектом наилучшим образом (оптимально), как применять для этих целей математические методы.

Применение математических методов для исследования физических, технических, технологических и т.д. процессов становится возможным после того, как построена математическая модель изучаемого процесса. Математические модели реальных физических процессов могут описываться

- обыкновенными дифференциальными уравнениями,
- разностными уравнениями,
- дифференциальными уравнениями в частных производных,
- интегральными уравнениями,
- смешанным образом, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, и т.д.

Математическое моделирование реальных процессов является ответственным этапом исследования.

Мы будем рассматривать математические модели, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такими моделями описывается достаточно широкий круг процессов, например, механическое движение летательных аппаратов и других технических объектов.

Предположим, что рассматриваемый объект в каждый момент времени t полностью описывается конечным набором чисел

$$x_1(t), \dots, x_n(t),$$

которые называются *фазовыми координатами* объекта. Из этих чисел образуем вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x \in E^n,$$

размерности n , который будем называть *вектором фазовых координат* объекта. Пусть закон изменения фазовых координат во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n; u), \quad i = 1, \dots, n,$$

где t – время, $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ – производная по времени t , f_i – известные функции своих аргументов. Основой для составления таких систем дифференциальных уравнений служат законы конкретных областей знания (например, физические законы). Эту систему дифференциальных уравнений удобно записывать в векторной форме

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Итак, динамика управляемого объекта описывается векторным дифференциальным уравнением (1), в правую часть которого входит параметр u , называемый управлением. Поучительно сравнить уравнение (1) с уравнением

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2)$$

которое является предметом исследования теории обыкновенных дифференциальных уравнений; правая часть уравнения (2) не содержит аргумента u .

Ответим сейчас на вопрос о том, как пользоваться дифференциальным уравнением (1) для выделения и исследования конкретного движения управляемого объекта. Уравнение (1) описывает не конкретное движение управляемого объекта, а его технические возможности. Для описания конкретного движения управляемого объекта следует

- выбрать управление $u = u(t)$ как некоторую функцию времени t ;
- задать начальное условие

$$x(t_0) = x_0; \quad (3)$$

- решить задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \equiv F(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Решение $x(t)$ задачи Коши (4), зависящее от управления $u(t)$ и начального условия x_0 , описывает конкретное движение управляемого объекта.

1.2. Класс допустимых управлений

Управление $u = u(t)$ характеризует положение "рулей" управляемого объекта. Пусть $u = (u_1, \dots, u_r)$ – r -мерный вектор.

Если u_1 – вектор, равный отклонению руля от некоторого направления, то типично ограничение

$$u_1^- \leq u_1 \leq u_1^+,$$

где u_1^- , u_1^+ – заданные числа, причем важно подчеркнуть, что крайние значения u_1^- , u_1^+ допустимы (неравенства нестрогие).

Если, например, u_2 – сила тяги, то типично ограничение

$$0 \leq u_2 \leq u_2^+,$$

где u_2^+ – максимально возможная сила тяги, причем и здесь крайние значения 0 , u_2^+ также допустимы.

Обобщая эту ситуацию, будем считать, что вектор управления в каждый момент времени t удовлетворяет условию

$$u \in U,$$

где U – некоторое замкнутое ограниченное множество в r -мерном пространстве E^r . Множество U называется *областью управления*.

Опишем теперь *класс допустимых управлений* \mathcal{U} : класс \mathcal{U} состоит из вектор-функций $u(t)$, значения которых

$$u(t) \in U \quad \forall t,$$

в описание класса допустимых управлений входит также структурное ограничение на управление $u(t)$, т.е. указание характера зависимости допустимых управлений $u(t)$ от времени t . Например, допустимые управления $u(t)$ могут быть

- кусочно-непрерывными функциями времени t ,
- кусочно-постоянными функциями времени t ,
- измеримыми функциями времени t ,
- гладкими функциями времени t .

Таким образом, можно кратко описать определение класса \mathcal{U} допустимых управлений следующим образом:

$$\mathcal{U} = \left\{ u(t) \left| \begin{array}{l} 1) u(t) \in U \quad \forall t, \\ 2) u(t) \text{ удовлетворяет заданному структурному ограничению} \\ \text{на характер зависимости от времени } t \end{array} \right. \right\}.$$

Выбор структурного ограничения определяется с одной стороны техническими, а с другой стороны математическими соображениями. Для приложений весьма важен класс кусочно-непрерывных управлений; для решения вопросов теоретического обоснования привлекается более обширный класс измеримых управлений.

Чтобы подчеркнуть зависимость класса \mathcal{U} допустимых управлений от области управления U $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$, будем писать

Определение 1.1. Управление $u(t)$ называется *кусочно-непрерывным* на отрезке $[t_0, t_1]$, если функция $u(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек $\tau_1, \dots, \tau_N \in (t_0, t_1)$, которые являются точками разрыва первого рода (точками разрыва с конечными скачками); кроме того, на концах отрезка $[t_0, t_1]$ выполняются равенства

$$u(t_0 + 0) = u(t_0), \quad u(t_1 - 0) = u(t_1).$$

1.3. Множества начальных и конечных состояний управляемого объекта

Мы уже говорили ([п.1.1](#)) о том, что для выделения конкретного движения управляемого объекта нужно выбрать управление $u = u(t)$ и задать начальное условие $x(t_0) = x_0$, а затем решить [задачу Коши \(4\)](#). Начальный момент времени t_0 считается

заданным, управление $u(t)$ выбирается из класса допустимых управлений, описанного в п. 1.2; вектор x_0 (начальное состояние управляемого объекта) может быть однозначно заданным или принадлежать некоторому множеству M_0 , лежащему в фазовом пространстве E^n . Таким образом, должно быть выполнено условие

$$x(t_0) \in M_0, \quad (5)$$

в котором множество M_0 называется *множеством начальных состояний* управляемого объекта. Это множество может состоять из одной точки x_0 , но может быть и более обширным (содержать более одной точки).

Предположим, что целью управления движением рассматриваемого объекта является перевод объекта из начального состояния (5) в конечное состояние

$$x(t_1) \in M_1, \quad (6)$$

где M_1 – некоторое множество, лежащее в фазовом пространстве E^n . Множество M_1 называется *множеством конечных состояний* объекта. Момент времени t_1 (конечный момент процесса управления, $t_1 > t_0$) может быть заранее заданным или же определяться в процессе решения задачи (это должно быть четко оговорено в постановке задачи). Итак, мы хотим перевести объект из множества M_0 во множество M_1 (рис.1.1).

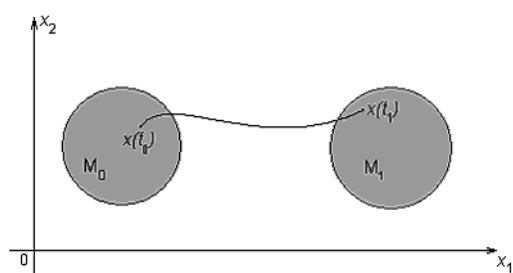


Рисунок 1.1.

Например, в задаче о переводе с одной орбиты на другую множества M_0 и M_1 состоят более, чем из одной точки.

Типична ситуация, когда перевод объекта из M_0 в M_1 может быть выполнен неединственным способом, при помощи различных допустимых управлений. В этом случае появляется возможность для оптимизации управляемого процесса, т.е. можно решать задачу о переводе объекта из M_0 в M_1 "наилучшим способом". Обсудим сейчас вопрос о том, какой смысл следует приписать последнему выражению.

1.4. Критерий качества управления

Рассмотрим пару

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (7)$$

где $u(t)$ – допустимое управление, $x(t)$ – отвечающая этому управлению траектория с начальным условием $x(t_0) = x_0 \in M_0$, т.е. $x(t)$ – решение задачи Коши (4), причем выполняется условие $x(t_1) \in M_1$.

Рассмотрим также функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt, \quad (8)$$

где $f^0(t, x, u)$ – известная функция своих аргументов. Таким образом, каждой паре (7) ставится в соответствие число J , определяемое по формуле (8). Функционал (8) называется *критерием качества управления*. Он может иметь физический смысл (в зависимости от функции f^0) а) расхода топлива, б) энергетических затрат, в) времени перехода из M_0 в M_1 , и т.д. Конкретный выбор функционала J в приложениях производится инженером, исходя из требований, предъявляемых к рассматриваемому управляемому объекту. В случае $f^0 = 1$ получаем

$$J = t_1 - t_0 \quad (9)$$

(функционал имеет физический смысл времени перехода объекта из M_0 в M_1).

Нашей целью является минимизация функционала (8), характеризующего качество процесса управления.

Мы описали выше основные элементы, типичные для математической задачи оптимального управления, и переходим сейчас к ее постановке.

1.5. Постановка задачи оптимального управления

Требуется: перевести объект из множества начальных состояний M_0 , см. (5), на множество конечных состояний M_1 , см. (6), за счет выбора допустимого управления $u = u(t)$ из класса допустимых управлений \mathcal{U} , так, чтобы функционал J , см. (8), принимал минимальное значение, или в компактной форме

$$J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Управление $u(t)$, решающее поставленную задачу, называется *оптимальным управлением* (в смысле функционала J). В случае (9) задача оптимального управления называется *задачей быстродействия*.

Таким образом, постановка *задачи оптимального управления* в краткой форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u); \\ u(t) \in \mathcal{U}, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ J \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases} \quad (10)$$

Задача (10) требует задания следующего набора исходных данных:

$$\{f^0, f; \mathcal{U} = \mathcal{U}_U; M_0, M_1, t_0\} \quad (11)$$

Напомним еще раз, что момент времени t_1 окончания процесса управления

а) может быть заранее заданным (и в этом случае число t_1 следует отнести к набору элементов (11))

б) может быть незадаанным (так обстоит дело, например, в задаче быстродействия, где t_1 заранее неизвестен), и в этом случае нахождение t_1 следует отнести к задаче нахождения оптимального управления $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

1.6. Основные математические вопросы теории оптимального управления

Перечислим основные вопросы теории оптимального управления:

1. Управляемость (возможность перевода объекта из M_0 в M_1 при помощи некоторого допустимого управления; без управляемости решения задачи (10) не существует). Исследование управляемости не связано с критерием качества.
2. Существование оптимального управления (пусть объект обладает свойством управляемости; существует ли оптимальное управление в выбранном классе допустимых управлений \mathcal{U} ?).
3. Необходимые условия оптимальности (теоремы о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина). Роль необходимых условий невозможно переоценить; необходимые условия позволяют, вообще говоря, выделить отдельные траектории, которые могут быть оптимальными, отбраковать заведомо неоптимальные решения. Роль необходимых условий оптимальности можно сравнить с ролью условия $f'(x) = 0$ в задаче на минимум функции $f(x)$ и с ролью уравнений Эйлера-Лагранжа в классическом вариационном исчислении.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Единственность оптимального управления.
6. Численные методы построения оптимальных решений.

В настоящем курсе излагается линейная теория быстродействия.

1.7. Линейная задача быстродействия

Линейная задача быстродействия является частным случаем задачи оптимального управления (10) при условии (9) и в предположении линейности функции f :

$$\dot{x} = Ax + u \quad (12)$$

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1, \quad (13)$$

$$J = t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_U}. \quad (14)$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор фазовых координат; $x \in E^n$,

$A = (a_{ij})$ – матрица системы (считаем её не зависящей от времени t),

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ – вектор управления; $u \in E^n$.

Класс допустимых управлений

$$Y = Y_U = \left\{ u(t) \left| \begin{array}{l} 1) \text{ принимает значения из компакта } U \\ 2) \text{ задан характер зависимости } u(t) \text{ от } t \end{array} \right. \right\}.$$

Компакт U называется *областью управления*.

M_0 – множество начальных состояний объекта,

M_1 – множество конечных состояний объекта,

$J = t_1 - t_0$ – критерий качества управления (время перехода из M_0 в M_1).

Линейная задача быстродействия (12)-(14) задается набором исходных данных

$$(A, M_0, M_1, Y = Y_U, t_0) \quad (15)$$

и состоит в нахождении допустимого управления $u = u(t)$, переводящего объект из M_0 в M_1 по траекториям уравнения (12) за минимальное время. Управление $u(t)$, решающее эту задачу, называется *оптимальным по быстродействию*, а соответствующая этому управлению траектория $x(t)$ называется *оптимальной по быстродействию траекторией*. Решить задачу быстродействия (12)-(14) означает, что нужно по набору исходных данных (15) найти оптимальную пару $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Векторное дифференциальное уравнение (12) равносильно системе

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

1.8. Два простейших примера

Пример 1.1. Управляемое движение материальной точки по прямой под действием ограниченной внешней силы.

Рассмотрим материальную точку массы m , которая движется по прямой (ось y) (рис.1.2), без трения под действием ограниченной внешней силы, направленной вдоль оси y .

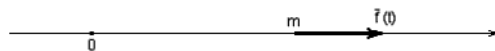


Рисунок 1.2.

Геометрическое положение материальной точки описывается координатой $y = y(t)$. На основании второго закона Ньютона запишем дифференциальное уравнение движения точки

$$m \ddot{y} = f(t),$$

т.е.

$$\ddot{y} = v(t), \quad (16)$$

где $v(t) = \frac{f(t)}{m}$ – управление. Считаем заданными начальные условия $y(0) = a$ (начальное положение точки), $\dot{y}(0) = b$ (начальная скорость точки). Дальнейшее движение точки зависит от выбора управления $v(t)$, которое при $m = 1$ совпадает с $f(t)$. Пусть управление $v(t)$ подчинено ограничению

$$|v(t)| \leq 1.$$

Рассмотрим задачу о переводе точки из начального положения a при начальной скорости b в положение $y = 0$ с нулевой скоростью. Этот перевод осуществляется за счет выбора управления $v(t)$. Требуется выполнить этот перевод за кратчайшее время.

Полагая $y = x_1, \dot{y} = x_2, v = u_2$, перейдем от дифференциального уравнения (16) второго порядка к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_2.\end{aligned}$$

В данном примере размерность фазового пространства равна 2, фазовым пространством служит фазовая плоскость x_1, x_2 . Множество начальных состояний $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$ состоит из одной точки $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, множество конечных состояний $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ – начало координат, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – фазовый вектор, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, область управления $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 = 0, |u_2| \leq 1 \right\}$ – отрезок. Таким образом, мы получили линейную задачу быстрогодействия в стандартной форме (12)-(14).

Пример 1.2. Управляемое движение математического маятника под действием ограниченной внешней силы.

Рассмотрим движение тяжёлого шарика массы m под воздействием упругой силы пружины и внешней силы $f(t)$ (рис.1.3).

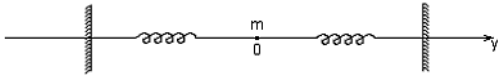


Рисунок 1.3.

Движение шарика происходит вдоль оси y . В состоянии равновесия шарик имеет координату $y = 0$. Привлекая физические законы – второй закон Ньютона и закон Гука (упругая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия и направлена в сторону положения равновесия), запишем дифференциальное уравнение движения

$$m \ddot{y} = -ky + f(t),$$

где положительный коэффициент k характеризует жёсткость пружины. Полагая $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $v(t) = \frac{f(t)}{m}$, приходим к уравнению

$$\ddot{y} + \omega^2 y = v(t). \quad (17)$$

(Здесь мы для упрощения считаем $\omega^2 = 1, |v(t)| \leq 1$). Пусть заданы начальные условия $y(0) = a, \dot{y}(0) = b$. Рассмотрим задачу о скорейшем успокоении маятника под действием ограниченной внешней силы $v(t)$.

Полагая $y = x_1, \dot{y} = x_2, v = u_2$, от уравнения (17) переходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2.\end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, здесь $n = 2$, $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$, $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 = 0, |u_2| \leq 1 \right\}$.

Мы опять пришли к постановке линейной задачи быстрогодействия в стандартной форме.

Решение этих примеров описывается в §§13, 16.

Лекция 2

§ 2. Некоторые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

При изучении линейной теории оптимального управления важную роль играет формула Коши для решения линейной системы. В §2 приводится обоснование формулы Коши для линейных систем с постоянными коэффициентами, изучается экспоненциал матрицы, рассмотрены примеры.

2.1. Формула Коши для решения начальной задачи в случае линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

2.1.1. Скалярный случай ($n=1$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = ax + u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ – неизвестная скалярная функция аргумента t , $u(t)$ – известная непрерывная функция, a – заданное число, x_0 – заданное начальное условие, t – независимая переменная (время), t_0 – начальный момент времени.

Решение задачи Коши (1) определяется следующей формулой:

$$x(t) = e^{(t-t_0)a} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)a} u(s) ds \right), \quad (2)$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, функция (2) удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и является решением дифференциального уравнения, так как

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a e^{(t-t_0)a} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)a} u(s) ds \right) + e^{(t-t_0)a} e^{-(t-t_0)a} u(t) = \\ &= ax(t) + u(t). \end{aligned}$$

Формула (2) называется *формулой Коши*.

Замечание 2.1. Если $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция со скачками в точках τ_1, \dots, τ_s , то формулой (2) определяется непрерывная кусочно-дифференцируемая функция $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$ $\forall t \neq \tau_1, \dots, \tau_s$; производная $\dot{x}(t)$ в точках τ_1, \dots, τ_s имеет конечные скачки (рис.2.1).

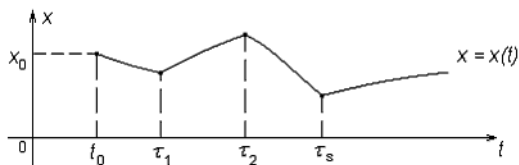
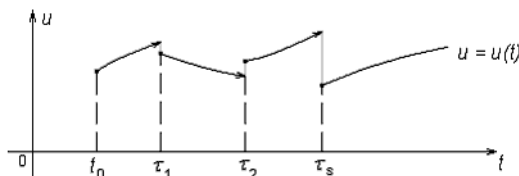


Рисунок 2.1.

2.1.2. Общий случай ($n > 1$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix};$$

$x = x(t)$ – неизвестная векторная функция, $u(t)$ – заданная непрерывная векторная функция, A – постоянная квадратная матрица,

x_0 – вектор начальных условий. Решение $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ задачи Коши (3) определяется формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right), \quad (4)$$

или

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds. \quad (5)$$

Формулы (4),(5) называются *формулами Коши*. В однородном случае ($u(t) = 0$) решение задачи Коши $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$ определяется формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0. \quad (6)$$

В формулах (4)-(6) участвует матричная функция $e^{(t-t_0)A}$, называемая экспоненциалом матрицы A . В [п.2](#) вводится понятие экспоненциала, изучаются его основные свойства. После этого нетрудно обосновать формулу Коши.

2.2. Экспоненциал постоянной квадратной матрицы. Его основные свойства. Обоснование формулы Коши

Рассмотрим квадратную матрицу n -ого порядка

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}; \quad D = ((D)_{ij})_{i,j=1}^n, \quad (D)_{ij} = d_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Напомним известную из математического анализа формулу

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Этот степенной ряд сходится при всех t .

Определим теперь экспоненциал матрицы D , положив

$$e^D = E + \frac{1}{1!} D + \frac{1}{2!} D^2 + \dots + \frac{1}{n!} D^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k. \quad (7)$$

Здесь $0! = 1$, $D^0 = E$ – единичная матрица n -го порядка.

Таким образом, экспоненциал определен как сумма матричного ряда (7), члены которого являются квадратными матрицами порядка n .

Экспоненциал e^D – квадратная матрица порядка n . Сходимость матричного ряда (7) понимается в смысле поэлементной сходимости, т.е.

$$(e^D)_{ij} = (E)_{ij} + \frac{1}{1!} (D)_{ij} + \frac{1}{2!} (D^2)_{ij} + \dots + \frac{1}{k!} (D^k)_{ij} + \dots \quad (8)$$

В случае $D = tA$, где t – скалярный множитель (в приложениях t – время), A – $(n \times n)$ -матрица, получаем

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \quad (9)$$

Теорема 2.1. (об основных свойствах экспоненциала)

1. Для любой $(n \times n)$ -матрицы D существует экспоненциал e^D (сходится матричный ряд (7), т.е. сходятся n^2 числовых рядов (8)).

2. Если A, B – две перестановочные ($AB = BA$) $(n \times n)$ -матрицы, то

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

3. Пусть $D = tA$; матричная функция e^{tA} непрерывно дифференцируема, причем

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Доказательство

1) Докажем сходимость числовых рядов (8) для любой матрицы D . Для этого оценим общий член рядов (8). Пусть

$$|(D)_{ij}| \leq d, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$|(D^2)_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n (D)_{ik} (D)_{kj} \right| \leq nd^2,$$

$$|(D^3)_{ij}| \leq n^2 d^3,$$

...

$$|(D^k)_{ij}| \leq n^{k-1} d^k,$$

...

Отсюда получаем оценку общего члена ряда (8):

$$\left| \frac{1}{k!} (D^k)_{ij} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{(nd)^k}{k!}. \quad (10)$$

Теорема сравнения для числовых рядов, сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(nd)^k}{k!} = \frac{e^{nd} - 1}{n}$$

и неравенство (10) позволяют сделать заключение о сходимости всех n^2 рядов (8), причем эти ряды сходятся абсолютно. Итак, экспоненциал e^D определен для любой матрицы D .

2) Пусть $AB = BA$. Тогда

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

.....

$$(A+B)^m = A^m + mA^{m-1}B + \dots + B^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} A^k B^{m-k} = \sum_{k+i=m, k, i \geq 0} \frac{m!}{k!i!} A^k B^i, \quad (11)$$

т.е. для перестановочных матриц A, B имеет место формула бинорма Ньютона, $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ – биномиальные коэффициенты. Привлекая (7), (11), получаем:

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} B^i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!i!} A^k B^i = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{\substack{k+i=m \\ k, i \geq 0}} \frac{m!}{k!i!} A^k B^i \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (A+B)^m \stackrel{(7)}{=} e^{A+B}. \end{aligned}$$

Упражнение 2.1. Привести примеры матриц A, B для которых $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$.

3) Невырожденность экспоненциала и формула для его обращения вытекают из части 2) рассматриваемой теоремы. Действительно, в силу перестановочности D и $(-D)$ получаем:

$$e^D \cdot e^{-D} = e^{D-D} = e^0 = E, \quad e^D \cdot e^{-D} = E.$$

4) Докажем, что матричная функция e^{tA} непрерывно дифференцируема по аргументу t , т.е. каждый её элемент $(e^{tA})_{ij}$ – непрерывно дифференцируемая функция аргумента t . Так как

$$(e^{tA})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A^k)_{ij} \quad (12)$$

– сумма степенного ряда относительно аргумента t (радиус сходимости этого ряда равен ∞), и степенные ряды можно дифференцировать сколько угодно раз, причем при дифференцируемости радиус сходимости не изменяется, то функции (12) аналитические. Следовательно, существует производная $\frac{d}{dt}(e^{tA})$, причем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= \frac{d}{dt} \left(E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right) = \\ &= A + tA^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k + \dots = A \left(E + tA + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} + \dots \right) = A e^{tA} = e^{tA} A. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}, \quad e^{tA}|_{t=0} = E. \quad (13)$$

Это свойство экспоненциала позволяет проверить справедливость формулы Коши при $n > 1$ (подобно тому, как это было сделано выше при $n = 1$). Действительно, для векторной функции $x(t)$, определяемой формулой (4), выполняется начальное условие $x(t_0) = x_0$ и, кроме того,

$$\dot{x}(t) = Ae^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right) + e^{(t-t_0)A} e^{-(t-t_0)A} u(t) = Ax(t) + u(t),$$

т.е. функция (4) является решением задачи Коши (3).

Итак, доказана

Теорема 2.2.

Решение [задачи Коши \(3\)](#) существует и определяется формулой Коши [\(4\)](#) или [\(5\)](#). Кроме того, решение задачи Коши (3) единственно.

Упражнение 2.2. Доказать единственность решения задачи Коши (3).

Упражнение 2.3. Проверить, что

$$(e^{tA})^* = e^{t(A^*)}, \quad e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A},$$

где $t, s \in \mathbb{R}^1$, * – знак транспонирования.

Замечание 2.2. Если непрерывная функция $u(t)$ определена на интервале (a, b) , содержащем точку t_0 , то решение задачи [\(1\)](#) определено на всем интервале (a, b) и описывается на этом интервале формулой Коши [\(4\)](#). Таким образом, формула Коши [\(4\)](#) применима как при $t > t_0$, так и при $t < t_0$.

Пример 2.1. Найти решение задачи Коши

$$\dot{x} = x + 1, \quad x(0) = 1.$$

Здесь $n = 1$, $\alpha = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $u(t) = 1$. Применение формулы (2) дает:

$$x(t) = e^t \left(1 + \int_0^t e^{-s} 1 ds \right) = e^t \left(1 + \frac{e^{-s}}{-1} \Big|_{s=0}^{s=t} \right) = e^t (1 - e^{-t} + 1) = 2e^t - 1.$$

Формулу Коши [\(4\)](#), [\(5\)](#) целесообразно запомнить, так как исследование линейной задачи быстрого действия основано в значительной степени на применении формулы Коши.

2.3. Примеры вычисления экспоненциала для конкретных матриц

Пример 2.2. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Прямое вычисление дает $A^2 = 0$; следовательно, $A^k = 0$ при $k \geq 2$, и ряд (7) содержит лишь 2 члена:

$$e^{tA} = E + tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Итак, } e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Находим

$$\begin{aligned} A^2 &= -E, & A^6 &= -E, \\ A^3 &= -A, & A^7 &= -A, \\ A^4 &= E, & A^8 &= E, \\ A^5 &= A, & A^9 &= A, \dots \end{aligned}$$

Применение формулы (7) дает:

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}(-E) + \frac{t^3}{3!}(-A) + \frac{t^4}{4!}E + \frac{t^5}{5!}A + \frac{t^6}{6!}(-E) + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)A =$$

$$= \cos(t)E + \sin(t)A. \quad (14)$$

Таким образом,

$$e^{tA} = \cos(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad e^{-tA} = e^{tA}.$$

В примерах 2.2, 2.3 экспоненциал e^{tA} получен вычислением ряда (7). Рассмотрим теперь другой прием нахождения экспоненциала на основе его свойства (13).

Пример 2.4. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Покажем, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для доказательства формулы (15) достаточно проверить, что матрица, стоящая в правой части (15), удовлетворяет условиям (13). Эта матрица при $t=0$ превращается в единичную матрицу, далее

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix},$$

и формула (15) доказана. Недостатком этого способа является то, что не указан способ получения самой формулы (15).

2) Рассмотрим метод получения (15) на основе свойства (13).

Запишем экспоненциал в форме

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} y_1(t) & z_1(t) \\ y_2(t) & z_2(t) \end{pmatrix} = (y(t) | z(t)).$$

Его первый столбец находим, решая задачу Коши

$$\dot{y} = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

причём вектором начальных условий служит первый столбец единичной матрицы. Последняя система в координатной форме имеет вид:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

$$\text{Решая её, получаем: } y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = 0; \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения второго столбца $z(t)$ экспоненциала решаем задачу Коши

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$z_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad z_2(t) = e^{-t}; \quad z(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы пришли к формуле (15).

Обратим внимание на то, что экспоненциал (15) может быть записан в форме

$$e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A, \quad (16)$$

где $p_0(t) = 1, p_1(t) = 1 - e^{-t}$. Аналогичное представление было получено для экспоненциала из [примера 2.3, см. \(14\)](#), где $p_0(t) = \cos(t)$, $p_1(t) = \sin(t)$.

Это наблюдение позволяет применить для нахождения экспоненциала следующий метод.

3) Ищем экспоненциал в форме (16), где функции $p_0(t), p_1(t)$ подлежат определению. Полагая в (16) $t = 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(0) & p_1(0) \\ 0 & p_0(0) - p_1(0) \end{pmatrix},$$

откуда следует, что функции $p_0(t), p_1(t)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя (16) по t , получаем

$$Ae^{tA} = \dot{p}_0(t)E + \dot{p}_1(t)A; \quad (18)$$

Подстановка (16) в (18) дает

$$p_0(t)A + p_1(t)A^2 = \dot{p}_0(t)E + \dot{p}_1(t)A,$$

откуда, принимая во внимание равенство $A^2 = -A$, находим

$$\dot{p}_0(t)E + (\dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t))A = 0,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_0(t) & \dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) \\ 0 & -\dot{p}_1(t) - p_1(t) + p_0(t) + \dot{p}_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\dot{p}_0(t) = 0, \quad \dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) = 0, \quad -\dot{p}_1(t) - p_1(t) + p_0(t) + \dot{p}_0(t) = 0.$$

Из условий $\dot{p}_0(t) = 0$, $p_0(0) = 1$ следует $p_0(t) = 1$. Далее из условий $\dot{p}_1(t) + p_1(t) - p_0(t) = 0$, $p_1(0) = 0$, $p_0(t) = 1$ следует, что $p_1(t) = 1 - e^{-t}$.

Таким образом, в примере 2.4

$$e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - e^{-t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Выбор представления экспоненциала (16), на котором основан последний метод, объясняет приведенная в п.2.4 [теорема 2.3](#).

Пример 2.5. Найти экспоненциал e^{tA} матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

$$e^{tA} = \operatorname{ch}(t)E + \operatorname{sh}(t)A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Пример 2.6. Найти e^{tA} , где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A^k = 0, \quad k \geq 3,$$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.7. Найти e^{tA} , для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$A^2 = A^4 = \dots = A^{2k} = E$; $A^3 = A^5 = \dots = A^{2k+1} = A$, $k = 1, 2, \dots$, и по формуле (7) получаем

$$e^{tA} = \operatorname{ch}(t)E + \operatorname{sh}(t)A = \operatorname{ch}(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{sh}(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & 0 & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \operatorname{sh}(t) & 0 & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Пример 2.8. Найти e^{tA} , где $(n \times n)$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как $A^n = 0$, то по формуле (7) получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.9. Найти экспоненциал e^{tA} , где $(n \times n)$ -матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{Жорданова клетка})$$

Пример 2.10. Пусть матрица J имеет клеточно-диагональную структуру

$$J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s),$$

где

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, s,$$

матрица размерности $k_m \times k_m$ (жорданова клетка); $k_1 + \dots + k_s = n$.

Показать, что $(n \times n)$ -матрица J имеет экспоненциал клеточно-диагональной структуры

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.11. Найти e^{tA} , если $A = T^{-1}JT$, где T – невырожденная $(n \times n)$ -матрица, J – матрица из примера 2.10. Показать, что $e^{tA} = T^{-1}e^{tJ}T$.

2.4. Теорема о представлении экспоненциала в виде конечной суммы

Теорема 2.3.

Пусть A – квадратная матрица n -ого порядка, t – скалярная переменная. Тогда

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A^j, \quad (19)$$

где $p_j(t)$ – скалярные непрерывные (и даже аналитические) функции аргумента t .

Доказательство

теоремы 2.3 основано на представлении экспоненциала e^{tA} в форме ряда (7) и теореме Гамильтона-Кэли, состоящей в том, что матрица аннулирует свой характеристический многочлен.

Запишем формулу (7) в виде

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} + \frac{t^n}{n!} A^n + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^{n+1} + \dots \quad (20)$$

Пусть

$$H_A(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n (\lambda^n - k_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - k_1 \lambda - k_0) \quad (21)$$

– характеристический многочлен матрицы A . Утверждение теоремы Гамильтона-Кэли можно записать в форме

$$H_A(\lambda)|_{\lambda=A} = O, \quad (22)$$

где $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размерности $(n \times n)$.

Из (21), (22) следует, что

$$A^n = q_0^{(n)} E + q_1^{(n)} A + \dots + q_{n-1}^{(n)} A^{n-1}, \quad (23)$$

где $q_j^{(n)} = k_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, – коэффициенты характеристического многочлена (21). Формула (23) показывает, что n -ая степень A^n матрицы A линейно выражается через меньшие степени $A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$ матрицы A , причем коэффициенты $q_j^{(n)}$ в (23) определяются матрицей A .

Покажем, что любая степень A^k , $k > n$ матрицы A также линейно выражается через $A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$ с некоторыми коэффициентами, зависящими от номера k (и от матрицы A). Действительно, умножив равенство (23) на матрицу A , получаем:

$$A^{n+1} = q_0^{(n)} A + q_1^{(n)} A^2 + \dots + q_{n-2}^{(n)} A^{n-1} + q_{n-1}^{(n)} [q_0^{(n)} E + q_1^{(n)} A + \dots + q_{n-1}^{(n)} A^{n-1}] =$$

$$= q_0^{(n+1)} E + q_1^{(n+1)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+1)} A^{n-1}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
q_0^{(n+1)} &= q_{n-1}^{(n)} q_0^{(n)}, \\
q_1^{(n+1)} &= q_0^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_1^{(n)}, \\
q_2^{(n+1)} &= q_1^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_2^{(n)}, \\
&\dots\dots\dots \\
q_{n-1}^{(n+1)} &= q_{n-2}^{(n)} + q_{n-1}^{(n)} q_{n-1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем получаем:

$$A^{n+2} = q_0^{(n+2)} E + q_1^{(n+2)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+2)} A^{n-1}, \quad (25)$$

$$A^{n+s} = q_0^{(n+s)} E + q_1^{(n+s)} A + \dots + q_{n-1}^{(n+s)} A^{n-1}, \quad \dots \quad (26)$$

Подстановка соотношений (24)-(26) в ряд (20) приводит (после перегруппировки членов) к представлению (19) экспоненциала e^{tA} .

Упражнение 2.1. Выписать ряды для коэффициентов $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$ в формуле (19) и доказать сходимость этих рядов при любом t .

Замечание 2.3. В формуле (19) фактически могут отсутствовать несколько старших степеней матрицы A . Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

из [примера 2.7](#), где $n = 3$, мы получили $e^{tA} = ch(t) \cdot E + sh(t) \cdot A$, т.е. здесь в представлении $e^{tA} = p_0(t)E + p_1(t)A + p_2(t)A^2$, $n = 3$, $n-1 = 2$, $p_0(t) = ch(t)$, $p_1(t) = sh(t)$, $p_2(t) = 0$,

член с A^2 фактически отсутствует. В случае $A = E$ имеем:

$$e^{tA} = e^t \cdot E,$$

т.е. здесь

$$p_0(t) = e^t, \quad p_1(t) = \dots = p_{n-1}(t) = 0.$$

Теорема 2.3 будет использоваться [в §15](#) при доказательстве леммы о внутренней точке интеграла.

2.5. Пример применения формулы Коши для нахождения решения линейных систем

Задача Коши

$$\dot{y} = u_2(t), \quad y(0) = a_1, \quad \dot{y}(0) = a_2, \quad (27)$$

$u_2(t)$ - заданная функция, a_1, a_2 - заданные числа, может быть решена двумя последовательными интегрированиями:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \dot{y}(0) + \int_0^t \dot{y}(s) ds = a_2 + \int_0^t u_2(s) ds, \\
y(t) &= y(0) + \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau = a_1 + \int_0^t (a_2 + \int_0^\tau u_2(s) ds) d\tau = \\
&= a_1 + a_2 t + \int_0^t \left(\int_0^\tau u_2(s) ds \right) d\tau = \\
&= a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s) u_2(s) ds.
\end{aligned}$$

Полагая $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, запишем задачу (27) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a_1,$$

$$\dot{x}_2 = u_2, \quad x_2(0) = a_2,$$

или

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(t) \end{pmatrix}$.

Найдем решение задачи (28), применяя формулу Коши (5). Имеем:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ a_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} (t-s)u_2(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s)u_2(s) ds \\ a_2 + \int_0^t u_2(s) ds \end{pmatrix}.$$

т.е.

$$x_1(t) = a_1 + a_2 t + \int_0^t (t-s)u_2(s) ds = y(t),$$

$$x_2(t) = a_2 + \int_0^t u_2(s) ds = \dot{y}(t).$$

Упражнение 2.2. Найти решение задачи Коши

- $\ddot{y} + y = u_2(t)$, $y(0) = a_1$, $\dot{y}(0) = a_2$;
- $y^{(3)} = u_2(t)$, $y(0) = a_1$, $\dot{y}(0) = a_2$, $\ddot{y}(0) = a_3$.

Лекция 3

§ 3. Множество достижимости, множество управляемости. Их представление на основе формулы Коши. Предварительные соображения о решении линейной задачи быстрогодействия

Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия

$$\dot{x} = Ax + u; \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1; \quad t_1 - t_0 \rightarrow \min$$

с классом допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$. При изучении этой задачи важную роль играют два множества – множество достижимости и множество управляемости.

3.1. Множество достижимости $X(t) = X(t_0, t, M_0)$

Введём множество $X(t_0, \tau, M_0)$, определяемое множеством M_0 , начальным моментом времени t_0 , числом $\tau > t_0$. (Это множество зависит также от матрицы A и от класса допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$). Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau; \quad x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad (1)$$

и выпишем её решение по формуле Коши

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds. \quad (2)$$

Поставим вопрос: куда можно перейти к моменту времени τ по траекториям дифференциального уравнения (1), исходящим в начальный момент времени t_0 из различных точек $x_0 \in M_0$, если разрешается использовать всевозможные допустимые управления $u(t) \in \mathcal{U}$? Множество концов $x(\tau)$ описанных выше траекторий образует некоторое множество в E^n , которое называется *множеством достижимости* и обозначается $X(t_0, \tau, M_0)$ (рис.3.1).

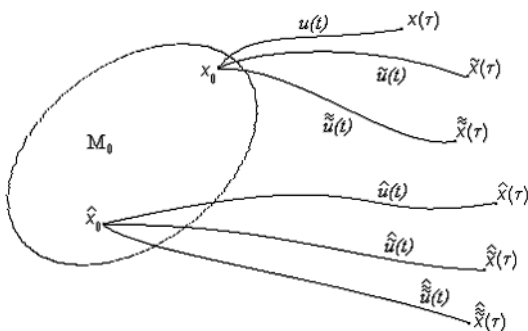


Рисунок 3.1.

Таким образом,

$$X(t_0, \tau, M_0) = \{x \in E^n : x = x(\tau), \text{ формула (2) при } t = \tau; \quad x(t_0) \in M_0, \quad u(t) \in \mathcal{U}\}, \quad (3)$$

или, в более подробной записи,

$$X(t_0, \tau, M_0) = \left\{ x \in E^n : x = e^{(\tau-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{(\tau-s)A} u(s) ds, \quad x_0 \in M_0, u(s) \in \mathcal{U} \right\}, \quad (4)$$

или

$$X(t_0, \tau, M_0) = \bigcup_{x_0 \in M_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ e^{(\tau-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{(\tau-s)A} u(s) ds \right\}. \quad (5)$$

Естественно считать, что $X(t_0, t, M_0)|_{t=t_0} = M_0$. Для множества достижимости часто удобно использовать обозначение:

$X(t) = X(t_0, t, M_0)$. Множество $X(t)$ с ростом t изменяется. При достаточно малых значениях $t - t_0 > 0$

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset, \quad (\text{рис.3.2}).$$

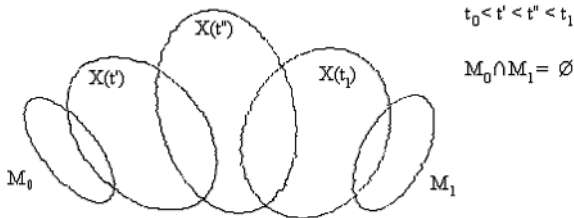


Рисунок 3.2.

Если $t_1 - t_0$ – оптимальное время перехода из M_0 в M_1 , то

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при } t_0 \leq t < t_1,$$

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

Подчеркнём, что априори ниоткуда не следует, что множество достижимости $X(t)$ в процессе изменения с течением времени войдёт в контакт с множеством M_1 .

3.2. Множество управляемости $Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$

Введём множество $Z(\tau, t_1, M_1)$, определяемое множеством M_1 , моментом времени t_1 , числом $\tau < t_1$. (Это множество зависит также от матрицы A и от класса допустимых управлений $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_v$.) Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad \tau \leq t \leq t_1; \quad x(t_1) = x_1 \in M_1. \quad (6)$$

Начальное условие в этой задаче задается на правом конце отрезка $[\tau, t_1]$. Выпишем ее решение по формуле Коши:

$$x(t) = e^{(t-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} u(s) ds = e^{(t-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} [-u(s)] ds. \quad (7)$$

Множество $Z(\tau, t_1, M_1)$ (множество управляемости) состоит из всех таких точек $z \in E^n$, находясь в которых в момент времени τ , объект в момент времени t_1 попадает на множество M_1 при помощи некоторого допустимого управления:

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \{z \in E^n : x = x(\tau), \text{ формула (7) при } t = \tau; x(t_1) \in M_1, u(t) \in \mathcal{Y}\}, \quad (8)$$

или, в более подробной записи,

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \left\{ z \in E^n : z = e^{(\tau-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^{\tau} e^{(\tau-s)A} [-u(s)] ds, \quad x_1 \in M_1, u(s) \in \mathcal{Y} \right\}, \quad (9)$$

или

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \bigcup_{x_1 \in M_1, u(s) \in \mathcal{Y}} \left\{ e^{(\tau-\tau)A} x_1 + \int_{\tau}^{\tau} e^{(\tau-s)A} [-u(s)] ds \right\}. \quad (10)$$

Естественно считать, что $Z(t, t_1, M_1)|_{t=t_1} = M_1$. Для множества управляемости удобно использовать обозначение: $Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1)$.

Свойства множеств $X(t)$, $Z(t)$ рассмотрены в §8. В случае $t_1 - t_0 = \text{min}$ между множествами $X(t)$ и $Z(t)$ имеется тесная связь, описанная в §11.

3.3. Представление множеств достижимости и управляемости на основе формулы Коши

Имеют место следующие представления:

$$X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \quad (11)$$

$$Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A} M_1 + \int_{t_1}^t e^{(t-s)A} [-\mathcal{Y}] ds. \quad (12)$$

Обсудим структуру правых частей формул (11), (12). Первые слагаемые имеют вид произведения матрицы (экспоненциала) на множество, а вторые слагаемые имеют вид интеграла от класса допустимых управлений \mathcal{U} . Для обоснования формул (11), (12) ниже вводятся линейные операции над множеством в пространстве E^n , операция интегрирования класса допустимых управлений \mathcal{U} .

3.4. Операции над множествами в пространстве E^n

Определение 3.1. Алгебраической суммой множеств $F_1, F_2 \subset E^n$ называется множество

$$F_1 + F_2 = \{x \in E^n : x = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\},$$

т.е.

$$F_1 + F_2 = \bigcup_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} (f_1 + f_2).$$

Пример 3.1. Пусть $F_1 = \{x_1 \leq 1, x_2 = 0\}$, $F_2 = \{x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$ – отрезки. Множество $F = F_1 + F_2$ есть квадрат $\{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$, (рис.3.3).

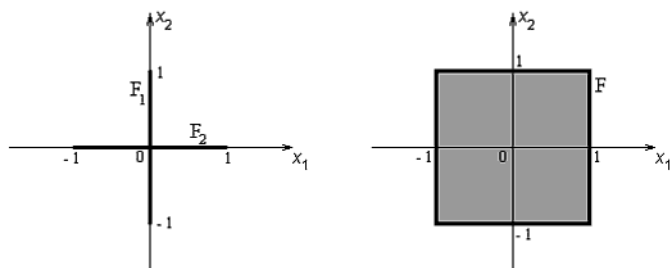


Рисунок 3.3.

Пример 3.2. Пусть $F_1 = \{a\}$ – множество, состоящее из одной точки $a \in E^2$, $F_2 = S_r(0)$ – круг. Тогда (рис.3.4) $F_1 + F_2 = \{a\} + S_r(0) = S_r(a)$ есть круг радиуса r с центром a .

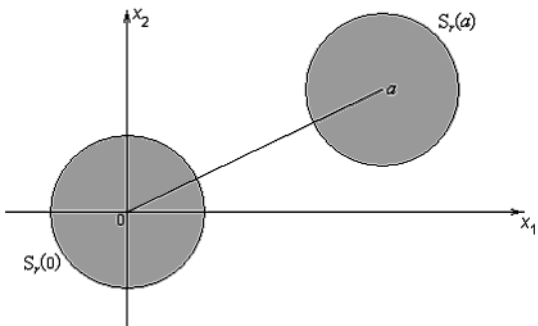


Рисунок 3.4.

Определение 3.2. Произведением $(n \times n)$ -матрицы D на множество $F \subset E^n$ называется множество

$$DF = \{x \in E^n : x = Df, f \in F\},$$

т.е.

$$DF = \bigcup_{f \in F} (Df).$$

Пример 3.3. Пусть

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad F = \{x_1 \leq 1, x_2 = 0\}.$$

Тогда (рис.3.5)

$$DF = \left\{x \in E^2 : x_2 = -x_1, |x_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \text{ – отрезок.}$$

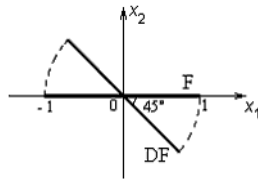


Рисунок 3.5.

Определение 3.3. (Интеграл от класса допустимых управлений.)

Пусть \mathcal{U} – класс допустимых управлений, $D(s)$ – $(n \times n)$ -матрица, непрерывно зависящая от скалярного аргумента $s \in [t_0, t]$; $t_0 < t$.
 Полагаем

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{U} ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds, \quad u(s) \in \mathcal{U} \right\},$$

$$\int_{t_0}^t D(s) [-\mathcal{U}] ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s) [-u(s)] ds, \quad u(s) \in \mathcal{U} \right\}.$$

Из формул (5), (10) и определений 3.1, 3.2, 3.3 следуют представления (11), (12).

Лекция 4

§ 4. Основные обозначения и определения. Наименьшая выпуклая оболочка множества и ее построение. Лемма об отделимости

4.1. Основные обозначения и определения

E^n – n -мерное евклидово пространство,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \dots \text{ – элементы пространства } E^n,$$

$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ – скалярное произведение элементов x и y ,

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ – норма элемента x ,

$\|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ – расстояние между элементами x и y ,

F – множество, лежащее в пространстве E^n ,

$S_r(a) = \{x \in E^n : \|x - a\| \leq r\}$ – шар радиуса r с центром в точке a ($r \geq 0, a \in E^n$),

$S = \{x \in E^n : \|x\| = 1\}$ – единичная сфера с центром в точке 0 ($0 \in E^n$).

Определение 4.1. Множество F называется *открытым*, если для любой точки $x \in F$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(x) \subset F$:

$\forall x \in F \quad \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \subset F$ (рис.4.1).

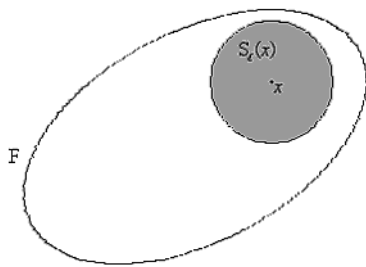


Рисунок 4.1.

Множества

- $F_1 = \{x = (x_1, x_2) \in E^2 : \|x_1\| < 1, \|x_2\| < 1\}$,
- $F_2 = \{x = (x_1, x_2) \in E^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

являются открытыми в E^2 ; множества $S_r(a), S$ не являются открытыми.

Определение 4.2. Точка $a \in E^n$ называется *предельной точкой множества F* , если $\forall \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(a) \cap F \neq \emptyset$.

Так, для множества $F = \{x \in E^n : \|x\| < 1\}$ все его предельные точки образуют множество $S_1(0)$.

Определение 4.3. Множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Множества $S_r(0), S$ замкнуты.

Определение 4.4. Множество F называется *ограниченным*, если $\exists R > 0 : F \subset S_R(0)$, см. рис.4.2.

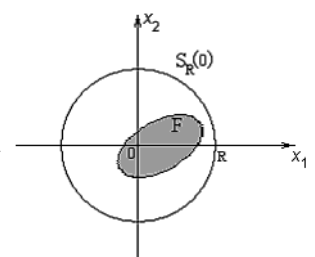


Рисунок 4.2.

Определение 4.5. Модулем множества F называется число

$$|F| = \sup_{f \in F} \|f\| = \inf_{r \geq 0} \{r : F \subset S_r(0)\}.$$

Для любого ограниченного множества F его модуль $|F| < \infty$. Модуль множества $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ равен $\sqrt{2}$.

Определение 4.6. Множество F называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Примерами компактов являются множества $S_r(0)$, S , $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$; множества $F_1 = S_1(0) \setminus \{0\}$, $F_2 = S_1(0) \setminus S$ не являются компактными (нет замкнутости), множество $F_3 = \{x \in E^2 : x_2 \geq 0\}$ (полуплоскость) не является компактом (нет ограниченности).

Определение 4.7. $\Omega(E^n)$ – множество, элементами которого являются всевозможные непустые компакты пространства E^n .

Определение 4.8. Пусть x, y – точки пространства E^n . *Отрезком* $[x, y]$ с концами x, y называется множество

$$[x, y] = \{z \in E^n : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\},$$

или

$$[x, y] = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \{\lambda x + (1 - \lambda)y\}.$$

Определение 4.9. Множество F называется *выпуклым*, если

$$x, y \in F \Rightarrow [x, y] \subset F.$$

Так, множество $S_r(a)$ выпукло, а множество S невыпукло. На рис.4.3 изображено невыпуклое множество.

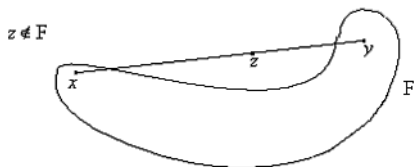


Рисунок 4.3.

Определение 4.10. $\text{conv}\Omega(E^n)$ – множество, состоящее из непустых выпуклых компактов пространства E^n .

Ясно, что $\text{conv}\Omega(E^n) \subset \Omega(E^n)$.

4.2. Наименьшая выпуклая оболочка множества и её построение

Определение 4.11. Множество $G \subset E^n$ называется *выпуклой оболочкой* множества F , если G выпукло и $G \supset F$.

Выпуклая оболочка множества определяется неединственным образом, см. рис. 4.4.

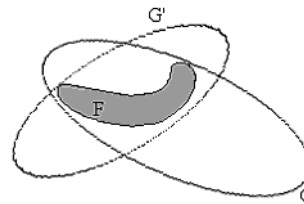


Рисунок 4.4.

Определение 4.12. Множество H называется *наименьшей выпуклой оболочкой* множества F , если

- H – выпуклая оболочка,
- для любой выпуклой оболочки G множества F выполняется $G \supset H$.

Обозначение наименьшей выпуклой оболочки множества

$$H = \text{conv } F.$$

Для невыпуклого множества F , изображенного на рис.4.5а, наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv } F$ изображена на рис.4.5 б.



Рисунок 4.5.

Если множество F выпукло, то $\text{conv} F = F$. Для множества F , состоящего из трех точек (рис.4.6), $\text{conv} F$ есть треугольник.

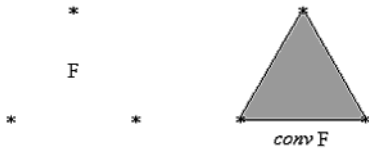


Рисунок 4.6.

Теорема 4.1. (о построении наименьшей выпуклой оболочки)

Для любого множества $F \subset \mathbb{E}^n$ существует наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv} F$, которую можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность множеств

$$F_0 = F,$$

$$F_1 = \bigcup_{x,y \in F_0} [x,y],$$

$$F_2 = \bigcup_{x,y \in F_1} [x,y],$$

...

$$F_{m+1} = \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y],$$

...

Положим $H = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$. Тогда $H = \text{conv} F$.

Доказательство

Для доказательства теоремы следует показать, что

- $F \subset H$,
- множество H выпукло,
- любая выпуклая оболочка G множества F содержит множество H : $G \supset H$

(см. определения [4.11](#), [4.12](#)).

Из построения множеств F_m , H следует свойство монотонности:

$$F = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_m \subset \dots \subset H.$$

Проверим выпуклость множества H : $x, y \in H \Rightarrow [x, y] \subset H$. Возьмем две точки $x, y \in H$. Существует такой номер m_1 , что $x \in F_{m_1}$; существует такой номер m_2 , что $y \in F_{m_2}$. Тогда из свойства монотонности следует, что $x, y \in F_m$, где $m = \max\{m_1, m_2\}$, и, привлекая определение множества F_{m+1} , получаем, что отрезок $[x, y] \subset F_{m+1} \subset H$. Доказана выпуклость множества H . Итак, H – выпуклая оболочка множества F .

Пусть теперь G – любая выпуклая оболочка множества F . Тогда

$$F = F_0 \subset G,$$

$$F_1 \subset G,$$

$$\begin{aligned}
 & F_2 \subset G, \\
 & \dots, \\
 & F_{m+1} \subset G, \\
 & \dots, \\
 & H = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \subset G,
 \end{aligned}$$

т.е. доказано, что $H = \text{conv } F$.

Замечание 4.1. Существует такой наименьший номер $s = s(n, F)$, что $F_s = F_{s+1} = \dots = H$, причем $0 \leq s \leq n$.

Так, например, для выпуклого множества F имеем $F_0 = F_1 = \dots = H$, т.е. $s=0$. Для множества F , состоящего из отрезка и точки, не лежащей на этом отрезке, (рис. 4.7),

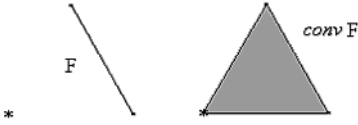


Рисунок 4.7.

имеем: $n=2, s=1, F_0 \neq F_1 = F_2 = \dots = H$. Для множества F , рассмотренного выше (рис. 4.6), $n=2, s=2$,

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 = F_3 = \dots = H, \quad F_0 \neq F_1, F_1 \neq F_2.$$

Замечание 4.2. Последовательность множеств $\{F_m\}$, введённая в теореме 4.1, может быть определена соотношениями

$$F_0 = F, \quad F_{m+1} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_m + (1-\lambda)F_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 F_{m+1} &= \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y] = \bigcup_{x,y \in F_m} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda x + (1-\lambda)y\} = \\
 &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \bigcup_{x,y \in F_m} \{\lambda x + (1-\lambda)y\} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda F_m + (1-\lambda)F_m\}.
 \end{aligned}$$

Упражнение 4.1. Установить включение $F \subset \lambda F + (1-\lambda)F \quad \forall \lambda \in [0,1]$.

Включение $F \supset \lambda F + (1-\lambda)F, \lambda \in (0,1)$, может не выполняться. Так при $n=1, F = (-1,+1), \lambda = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F = (-1,0,+1)$, т.е. множество F не содержит множество $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F$.

Упражнение 4.2. Показать, что для выпуклого множества F при любом $\lambda \in [0,1]$

$$F = \lambda F + (1-\lambda)F.$$

Упражнение 4.3. Алгебраическая сумма множеств $F_1 + F_2$ выпуклых множеств F_1, F_2 является выпуклым множеством.

Упражнение 4.4. Если F — выпуклое множество, D — $(n \times n)$ -матрица, то множество DF выпукло.

Упражнение 4.5. Доказать утверждение о стабилизации цепочки множеств $\{F_m\}$ в конечномерном пространстве E^n , см.

Замечание 4.1.

Упражнение 4.6. Если $F \in \Omega(E^n)$, то $\text{conv } F \in \text{conv } \Omega(E^n)$.

4.3. Лемма об отделимости (строгая отделимость) и её геометрическая интерпретация. Опорная гиперплоскость

Лемма 4.1.

Пусть

- $H \in \text{conv } \Omega(E^n)$ (H — выпуклый компакт),
- $x_0 \notin H$ (точка x_0 не принадлежит компакт H).

Тогда

$$\exists \psi \neq 0: (h - x_0, \psi) < 0 \quad \forall h \in H, \quad (I)$$

$$\exists \psi_0 \in S: (h - x_0, \psi) < 0 \quad \forall h \in H. \quad (2)$$

Утверждения (1) и (2) равносильны. Лемма об отделимости имеет простой геометрический смысл (рис. 4.8):

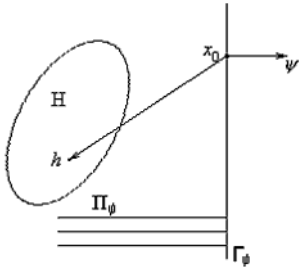


Рисунок 4.8.

через точку x_0 можно провести гиперплоскость Γ_ψ с вектором нормали ψ такую, что компакт H лежит по одну сторону от гиперплоскости и не имеет с ней общих точек. Другими словами, компакт H лежит в открытом полупространстве Π_ψ , ограниченном гиперплоскостью Γ_ψ . Неравенство (1) означает, что вектор ψ образует с векторами $h - x_0$ тупой угол при любом $h \in H$.

Обратимся к доказательству леммы.

Доказательство

1. Конструктивное описание вектора ψ . Пусть h_0 – ближайшая к x_0 точка множества H , т.е.

$$\min_{h \in H} \|h - x_0\| = \|h_0 - x_0\| > 0. \quad (3)$$

Отметим, что точка h_0 называется *проекцией точки x_0 на компакт H* (обозначение: $h_0 = pr_H x_0$) (рис. 4.9). Минимум в (3) на основании теоремы Вейерштрасса достигается в некоторой точке $h_0 \in H$, причем строгое неравенство $\|h_0 - x_0\| > 0$ выполняется, так как $x_0 \notin H$ и H – компакт. Полагаем

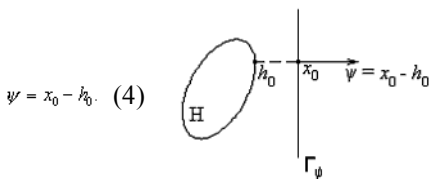


Рисунок 4.9.

2. Покажем теперь, что с определенным равенством (4) вектором ψ справедливо неравенство (1), т.е.

$$(h - x_0, x_0 - h_0) < 0 \quad \forall h \in H.$$

Последнее неравенство равносильно следующему

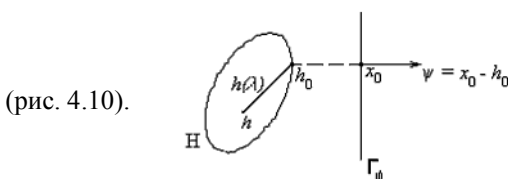
$$(h - x_0, h_0 - x_0) > 0 \quad \forall h \in H. \quad (5)$$

Неравенство (5) при $h = h_0$ верно, так как $\|h_0 - x_0\| > 0$. Покажем, что

$$(h - x_0, h_0 - x_0) \geq \|h_0 - x_0\|^2 > 0 \quad \forall h \in H. \quad (6)$$

Возьмем любую точку $h \in H, h \neq h_0$, и рассмотрим отрезок

$$[h, h_0] = \{h(\lambda) = \lambda h + (1 - \lambda)h_0, \lambda \in [0, 1]\},$$



(рис. 4.10).

Рисунок 4.10.

В силу выпуклости множества H имеем: $h(\lambda) \in H \quad \forall \lambda \in [0,1]$. Поэтому в силу (3)

$$\|h(\lambda) - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2 \quad \forall \lambda \in [0,1]. \quad (7)$$

Неравенство (7) последовательно преобразуется следующим образом:

$$\|\lambda k + (1-\lambda)k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\|\lambda(k - k_0) + (k_0 - x_0)\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\lambda^2 \|k - k_0\|^2 + 2\lambda \langle k - k_0, k_0 - x_0 \rangle + \|k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2,$$

$$\lambda \|k - k_0\|^2 + 2 \langle k - k_0, k_0 - x_0 \rangle \geq 0.$$

Переход к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ в последнем неравенстве даёт

$$\langle k - k_0, k_0 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall k \in H. \quad (8)$$

Докажем теперь неравенство (6), привлекая (8). Имеем

$$\langle k - x_0, k_0 - x_0 \rangle = \langle k - k_0 + k_0 - x_0, k_0 - x_0 \rangle = \langle k - k_0, k_0 - x_0 \rangle + \|k_0 - x_0\|^2 \geq \|k_0 - x_0\|^2 \quad \forall k \in H.$$

Замечание 4.3. Оба условия леммы об отделимости существенны: утверждение леммы не сохраняется при отсутствии выпуклости компакта H , при нарушении замкнутости или ограниченности множества H , при $x_0 \in H$.

Замечание 4.4. Если k_0 – граничная точка выпуклого компакта H , то

$$\exists \psi \in E^n, \psi \neq 0 : \langle k - k_0, \psi \rangle \leq 0 \quad \forall k \in H. \quad (9)$$

С геометрической точки зрения это означает, что через точку k_0 можно провести гиперплоскость

$$\Gamma_\psi = \{x \in E^n : \langle x - k_0, \psi \rangle = 0\},$$

которая делит все пространство E^n на два полупространства, одно из которых (полупространство $\Pi_\psi = \{x \in E^n : \langle x - k_0, \psi \rangle \leq 0\}$)

содержит выпуклый компакт $H : \Pi_\psi \supset H$ (рис. 4.11).

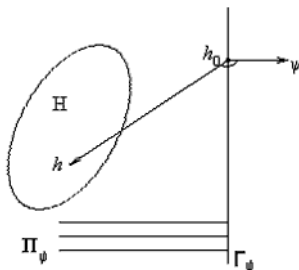


Рисунок 4.11.

Гиперплоскость Γ_ψ называется *опорной гиперплоскостью* для компакта H . Неравенство (9) запишем в форме

$$\langle k, \psi \rangle \leq \langle k_0, \psi \rangle \quad \forall k \in H.$$

Из него следует, что

$$c(H, \psi) \equiv \max_{k \in H} \langle k, \psi \rangle = \langle k_0, \psi \rangle.$$

Функция $c(H, \psi)$, определяемая компактом H , называется *опорной функцией* этого компакта в направлении вектора ψ . При помощи этой функции можно описать гиперплоскость Γ_ψ и полупространство Π_ψ :

$$\Gamma_\psi = \{x \in E^n : \langle x, \psi \rangle = c(H, \psi)\},$$

$$\Pi_\psi = \{x \in E^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(H, \psi)\}.$$

Достаточно представительный набор опорных гиперплоскостей $\Gamma_{\nu_1}, \Gamma_{\nu_2}, \dots, \Gamma_{\nu_n}$ позволяет строить аппроксимации выпуклых компактов в форме пересечения полупространств $\Pi_{\nu_1}, \Pi_{\nu_2}, \dots, \Pi_{\nu_n}$, каждое из которых, как мы видим, описывается опорной функцией $c(H, \nu)$ компакта H .

В следующем параграфе проводится подробное изучение опорных функций.

Лекция 5

§ 5. Опорные функции ограниченных множеств

Опорные функции представляют собой удобный аналитический аппарат для описания выпуклых компактов. Этот аппарат в дальнейшем будет применяться при изучении линейной задачи быстрого действия. Опорные функции удобно применять не только для изложения теории, но и при построении численных методов решения задачи быстрого действия.

5.1. Предварительные геометрические соображения

Рассмотрим выпуклый компакт F на плоскости. Ясно, что компакт F можно приближённо представить при помощи описанных выше многоугольников, (рис. 5.1), причем при подходящем увеличении числа сторон выпуклого многоугольника выпуклый компакт F может быть представлен весьма точно.

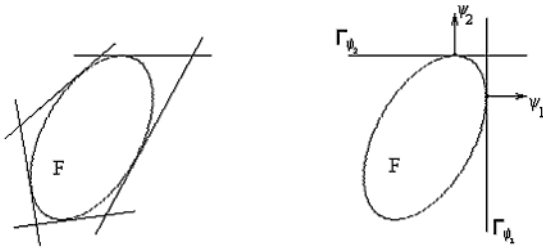


Рисунок 5.1.

Если выбрать достаточно представительный набор векторов $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N \in S$, то получим

$$F \subset \bigcap_{k=0}^N \Pi_{\psi_k} \equiv M_N,$$

где пересечение конечного числа полупространств (полуплоскостей) – выпуклый многоугольник M_N – даёт достаточно точное описание выпуклого компакта F . Мы покажем далее, что выпуклый компакт $F \subset E^n$ может быть получен как пересечение всех полупространств Π_{ψ} , когда вектор ψ пробегает единичную сферу S :

$$F = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_{\psi}, \quad \Pi_{\psi} = \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}.$$

Так как каждое из опорных полупространств описывается с помощью опорной функции $c(F, \psi)$ компакта F , то на этом пути мы приходим к возможности аналитического описания выпуклых компактов при помощи их опорных функций.

Эти геометрические соображения полезно иметь в виду при изучении материала §5.

5.2. Определение опорной функции ограниченных множеств

Пусть F – ограниченное множество, лежащее в некотором шаре $S_R(0)$ пространства E^n , ψ – вектор пространства E^n .

Определение 5.1. Опорной функцией множества F называется функция, определяемая равенством

$$c(F, \psi) = \sup_{f \in F} (f, \psi). \quad (1)$$

Опорная функция любого ограниченного множества принимает конечные значения при любом векторе $\psi \in E^n$. Действительно, $|(f, \psi)| \leq \|f\| \|\psi\|$,

$$(f, \psi) \leq \|\psi\| \sup_{f \in F} \|f\| \quad (2)$$

где число $|F| = \sup_{f \in F} \|f\|$ называемое *модулем множества F* , не превосходит R . Отсюда вытекает оценка

$$c(F, \psi) \leq |F| \|\psi\|. \quad (3)$$

Ясно также, что

$$|c(F, \psi)| \leq |F| \|\psi\|.$$

Замечание 5.1. Множество F может быть незамкнутым и невыпуклым.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.1. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = S_1(0)$ – круг радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём его опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \max_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ – открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём его опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| < 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

Пример 5.3. Рассмотрим на плоскости E^2 множество $F = S = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ – окружность радиуса 1 с центром в начале координат – и найдём её опорную функцию:

$$c(F, \psi) = \sup_{\|f\| = 1} (f, \psi) = \max_{\|f\| = 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}.$$

В рассмотренных выше трех примерах различные множества имеют одну и ту же опорную функцию. Множества из примеров 5.1, 5.2 (замкнутый, открытый круги) связаны между собой: первое множество является замыканием второго. Имеется связь и между множествами из примеров 5.1 и 5.3: единичный круг $S_1(0)$ является наименьшей выпуклой оболочкой окружности S .

Пример 5.4. Найдём опорную функцию множества $F = \{x \in E^n : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ (квадрат, см. рис. 5.2).

Решение

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi) = \max_{|f_1| \leq 1, |f_2| \leq 1} (f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

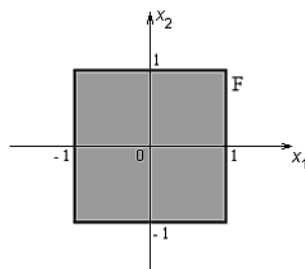


Рисунок 5.2.

Упражнение 5.1. Выяснить, является ли опорная функция множеств из примеров 5.1 – 5.4 дифференцируемой функцией аргумента $\psi = (\psi_1, \psi_2)$.

Выясним геометрический смысл опорной функции. Пусть F – компакт, $c(F, \psi)$ – его опорная функция, а вектор $\psi \in S$, т.е. $\|\psi\| = 1$, $c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi) = (f_0, \psi)$, $f_0 \in F$, (рис. 5.3).

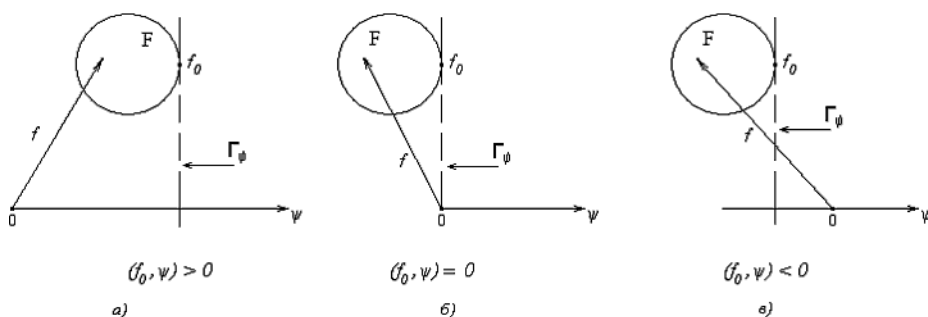


Рисунок 5.3.

Опорная функция $c(F, \psi) = (f_0, \psi)$ равна наибольшей величине проекции векторов $f \in F$ на единичный вектор ψ . Знак (f_0, ψ) характеризует взаимное расположение множества F и точки 0 относительно опорной гиперплоскости Γ_ψ :

- если $(f_0, \psi) > 0$, то компакт F и начало координат 0 расположены по одну сторону от опорной гиперплоскости Γ_ψ , (рис. 5.3, а);

- если $(f_0, \psi) = 0$, то $0 \in \Gamma_\psi$, (рис. 5.3, б);
- если $(f_0, \psi) < 0$, то компакт F и начало координат 0 расположены по разные стороны от опорной гиперплоскости Γ_ψ , (рис. 5.3, в).

При $\psi \in \mathcal{S}$ опорная функция $c(F, \psi)$ равна расстоянию от начала координат до опорной гиперплоскости Γ_ψ , причём расстоянию приписывается определённый знак.

5.3. Простейшие свойства опорных функций (свойства 1–10)

Здесь будут рассмотрены 10 простейших свойств опорной функции.

Свойство 1

а) пусть $F \in \Omega(E^n)$, тогда $c(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi)$;

б) пусть F – ограниченное множество, лежащее в пространстве E^n , а \bar{F} – замыкание множества F , тогда $c(F, \psi) = c(\bar{F}, \psi)$.

Доказательство

В силу непрерывности скалярного произведения (f, ψ) (по аргументу f) для компактного множества F $\max_{f \in F} (f, \psi)$ достигается в некоторой точке $f_0 \in F$ (теорема Вейерштрасса), поэтому вместо точной верхней грани (\sup) в формуле (1) можно записать знак максимума (\max), что доказывает утверждение а). Утверждение б) вытекает из определений опорной функции, замыкания множества и непрерывности скалярного произведения (f, ψ) .

Свойство 1 можно проиллюстрировать примерами [5.1](#), [5.2](#).

Свойство 2 (положительная однородность опорной функции по второму аргументу)

$$c(F, \lambda\psi) = \lambda c(F, \psi) \quad \forall \lambda \geq 0, \psi \in E^n.$$

Доказательство

Имеем:

$$c(F, \lambda\psi) = \sup_{f \in F} (f, \lambda\psi) = \sup_{f \in F} \lambda (f, \psi) = \lambda \sup_{f \in F} (f, \psi) = \lambda c(F, \psi).$$

↓

Для множества $F = S_1(0)$ из [примера 5.1](#) $c(F, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$. Пусть $\lambda \geq 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)$, тогда $\lambda\psi = (\lambda\psi_1, \lambda\psi_2), c(F, \lambda\psi) = \sqrt{(\lambda\psi_1)^2 + (\lambda\psi_2)^2} = \lambda c(F, \psi)$.

Проверить выполнение свойства 2 для множества из примера 5.4.

Упражнение 5.2. Являются ли функции $g_1 = \psi_1^2 + \psi_2^2, g_2 = 1 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$ опорными функциями некоторого компакта $F \in \Omega(E^2)$?

Свойство 3

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) \leq c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2) \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n.$$

Доказательство

Пусть \bar{F} – замыкание ограниченного множества F . Тогда $\bar{F} \in \Omega(E^n)$ и, привлекая свойство 1, получаем:

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) = c(\bar{F}, \psi_1 + \psi_2) = \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_1 + \psi_2) = (f_0 \in \bar{F}) = (f_0, \psi_1 + \psi_2) = (f_0, \psi_1) + (f_0, \psi_2) \leq$$

$$\leq \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_1) + \max_{f \in \bar{F}} (f, \psi_2) = c(\bar{F}, \psi_1) + c(\bar{F}, \psi_2) = c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2).$$

Упражнение 5.3. Доказать выпуклость опорной функции $c(F, \psi)$ по второму аргументу (использовать определение выпуклости функции и свойства 2, 3 опорных функций). Проверить выполнение этого утверждения в [примере 5.1](#).

Свойство 4 (условие Липшица по второму аргументу)

$$|c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2)| \leq |F| \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n;$$

здесь $|F| = \sup_{f \in F} \|f\|$ – модуль множества F ; множитель $|F|$ играет роль константы Липшица.

Доказательство

Используя свойство 3, получаем:

$$c(F, \psi_1) = c(F, (\psi_1 - \psi_2) + \psi_2) \leq c(F, \psi_1 - \psi_2) + c(F, \psi_2).$$

Отсюда, привлекая неравенство (2), находим:

$$c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2) \leq |F| \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Поменяв роли векторов ψ_1 и ψ_2 в предыдущих рассуждениях, приходим к неравенству

$$c(F, \psi_2) - c(F, \psi_1) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Из двух последних неравенств вытекает двойное неравенство

$$-|F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \leq c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

т.е.

$$|c(F, \psi_1) - c(F, \psi_2)| \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по второму аргументу:

$$c(F, \psi') \rightarrow c(F, \psi), \quad \psi' \rightarrow \psi.$$

Свойство 5. (опорная функция линейно преобразованного множества)

Пусть D – квадратная матрица n -го порядка. Тогда

$$c(DF, \psi) = c(F, D^* \psi) \quad \forall \psi \in E^n,$$

где D^* – матрица, полученная из матрицы D транспонированием.

Доказательство

Свойство 5 вытекает из определений опорной функции, операции линейного преобразования множества и свойств скалярного произведения

$$c(DF, \psi) = \sup_{x \in DF} (x, \psi) = (x \in DF \Leftrightarrow x = Df, f \in F) = \sup_{f \in F} (Df, \psi) = \sup_{f \in F} (f, D^* \psi) = c(F, D^* \psi).$$

В частном случае матрицы $D = \alpha E$, где α – число, E – единичная матрица, множество

$$DF = (\alpha E)F = \alpha F,$$

и на основании свойства 5

$$c(\alpha F, \psi) = c(F, \alpha \psi).$$

Если число $\alpha \geq 0$, то, привлекая свойство 2, получаем

$$c(\alpha F, \psi) = \alpha \cdot c(F, \psi) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in E^n.$$

Итак, имеет место

Свойство 6. (положительная однородность по первому аргументу)

$$c(\alpha F, \psi) = \alpha \cdot c(F, \psi) \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \psi \in E^n.$$

Свойство 7. (аддитивность по первому аргументу)

$$c(F_1 + F_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi).$$

Доказательство

Используя определение опорной функции и операции алгебраического сложения множеств, получаем

$$\begin{aligned} c(F_1 + F_2, \psi) &= \sup_{x \in F_1 + F_2} (x, \psi) = (x \in F_1 + F_2 \Leftrightarrow x = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2) = \sup_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} (f_1 + f_2, \psi) = \\ &= \sup_{f_1 \in F_1} (f_1, \psi) + \sup_{f_2 \in F_2} (f_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi). \end{aligned}$$

Свойство 8

$$а) \quad c(F_1 \cup F_2, \psi) = \max\{c(F_1, \psi), c(F_2, \psi)\},$$

б) для семейства $\{F_\lambda\}$ равномерно ограниченных множеств, зависящих от параметра λ , принадлежащего некоторому множеству Λ ($\exists R > 0 : |F_\lambda| \leq R \quad \forall \lambda \in \Lambda$)

$$c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \psi\right) = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(F_\lambda, \psi).$$

Доказательство

В случае а) получаем

$$c(F_1 \cup F_2, \psi) = \sup_{x \in F_1 \cup F_2} (x, \psi) = \max\{\sup_{x \in F_1} (x, \psi), \sup_{x \in F_2} (x, \psi)\} = \max\{c(F_1, \psi), c(F_2, \psi)\}.$$

В случае б) множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ ограничено (оно принадлежит шару $S_R(0)$) и

$$c\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \psi\right) = \sup_{x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda} (x, \psi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{x \in F_\lambda} (x, \psi) = \sup_{\lambda \in \Lambda} c(F_\lambda, \psi).$$

Свойство 9

Пусть λ_1, λ_2 – неотрицательные числа, F_1, F_2 – ограниченные множества, лежащие в пространстве E^n . Тогда

$$c(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, \psi) = \lambda_1 c(F_1, \psi) + \lambda_2 c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Доказательство

Свойство 9 вытекает из свойств 7 и 6.

Свойство 10. (совпадение опорных функций множества и его наименьшей выпуклой оболочки)

$$c(F, \psi) = c(\text{conv } F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n. \quad (4)$$

Доказательство

В §4 доказано, что

$$\text{conv } F = H \equiv \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m,$$

где

$$F_0 = F, \quad F_{m+1} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_m + (1-\lambda)F_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Привлекая свойство 8 б), можно записать

$$c(\text{conv } F, \psi) = c\left(\bigcup_{m \geq 0} F_m, \psi\right) = \sup_{m \geq 0} c(F_m, \psi). \quad (5)$$

Покажем, что

$$c(F_m, \psi) = c(F, \psi), \quad m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Тогда из (5), (6) вытекает утверждение (4) свойства 10.

Ясно, что $c(F_0, \psi) = c(F, \psi)$. Далее $F_1 = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda F_0 + (1-\lambda)F_0)$ и, используя свойства 8 б) и 9, получаем

$$c(F_1, \psi) = \sup_{\lambda \in [0,1]} c(\lambda F_0 + (1-\lambda)F_0, \psi) = \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda c(F_0, \psi) + (1-\lambda)c(F_0, \psi)) = \sup_{\lambda \in [0,1]} c(F_0, \psi) = c(F_0, \psi).$$

Итак, равенство (6) верно при $m = 0, 1$; его справедливость для любого номера m устанавливается индукцией.

Мы изучили первую группу свойств (свойства 1 – 10) опорных функций. Далее рассмотрены примеры нахождения опорных функций некоторых множеств. При разборе этих примеров привлекаются изученные выше свойства опорных функций.

5.4. Примеры

Пример 1 Найти опорную функцию множества

$$F_1 = S_1(0) = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\} \in \Omega(E^n)$$

(единичный шар в пространстве E^n).

Решение

Так как $(f, \psi) \leq \|f\| \cdot \|\psi\|$, $(f, \psi)|_{f \in F_1} = \|\psi\|$ то

$$c(F_1, \psi) = \max_{\|f\| \leq 1} (f, \psi) = \|\psi\| = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}; \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Пример 2 Найти опорную функцию множества

$$F_2 = S_r(0) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$$

(шар радиуса $r \geq 0$ с центром в начале координат).

Решение

Замечая, что $S_r(0) = r \cdot S_1(0)$ и, используя свойство 6 и результат примера 1, получаем:

$$c(F_2, \psi) = c(r \cdot S_1(0), \psi) = r \cdot c(S_1(0), \psi) = r \|\psi\|.$$

Пример 3 Найти опорную функцию множества

$$F_3 = \{a\} \in \Omega(\mathbb{E}^n),$$

состоящего из одной точки $a \in \mathbb{E}^n$.

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_3, \psi) = (a, \psi) = a_1 \psi_1 + \dots + a_n \psi_n.$$

Пример 4 Найти опорную функцию множества

$$F_4 = S_r(a) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$$

(шар радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{E}^n$).

Решение

Привлекая равенство $S_r(a) = \{a\} + S_r(0)$, [свойство 7](#) и результат примеров 2, 3 получаем:

$$c(F_4, \psi) = c(\{a\}, \psi) + c(S_r(0), \psi) = (a, \psi) + r \|\psi\| = a_1 \psi_1 + \dots + a_n \psi_n + r \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}.$$

Установленное соотношение будет использовано при дальнейшем изложении курса.

Пример 5 Найти опорную функцию множества

$$F_5 = \{-v, v\}, v \in \mathbb{E}^n,$$

состоящего из двух точек $-v$ и v .

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_5, \psi) = \max\{(-v, \psi), (v, \psi)\} = |(v, \psi)|.$$

Пример 6 Найти опорную функцию множества

$$F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \Omega(\mathbb{E}^2),$$

состоящего из двух точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.

Решение

По определению опорной функции

$$c(F_6, \psi) = \max\{-\psi_1, \psi_1\} = |\psi_1|.$$

Пример 7 Найти опорную функцию множества

$$F_7 = \{x \in \mathbb{E}^2 : |x_1| \leq 1, x_2 = 0\}.$$

(отрезок на плоскости с концами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$).

Решение

Имеем:

$$c(F_7, \psi) = \max_{x \in F_7} (x, \psi) = |\psi_1|.$$

Мы видим, что $c(F_7, \psi) = c(F_6, \psi)$; это иллюстрирует свойство 10, так как $F_7 = \text{conv } F_6$.

Пример 8 Найти опорную функцию множества

$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} (-1, -1) \\ (-1, 1) \\ (1, -1) \\ (1, 1) \end{pmatrix} \right\} \in \Omega(\mathbb{E}^2),$$

состоящего из четырёх точек, расположенных в вершинах квадрата.

Решение

Имеем:

$$c(F_8, \psi) = \max_{x \in F_8} (x, \psi) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Пример 9 Найти опорную функцию множества

$$F_9 = \{x \in \mathbb{E}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} \in \Omega(\mathbb{E}^2)$$

(квадрат).

Решение

Имеем:

$$c(F_9, \psi) = \max_{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1} (x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2) = |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Совпадение опорных функций множеств F_8 и F_9 опять иллюстрирует [свойство 10](#), так как $F_9 = \text{conv } F_8$.

Пример 10 Найти опорные функции множеств, ограниченных эллипсоидами

- $F_{10} = \mathfrak{E}_a \equiv \{x \in \mathbb{E}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1, a_i > 0;$
- $F'_{10} = \mathfrak{Q} \equiv \{x \in \mathbb{E}^n : (\mathfrak{Q}x, x) \leq 1\}$, \mathfrak{Q} – симметричная положительно определённая матрица порядка n .

Решение

Для нахождения опорной функции множества F_{10} заметим, что

$$\mathfrak{E}_a = A \cdot S_1(0),$$

где A – диагональная матрица с элементами a_1, \dots, a_n на диагонали, $A = A^*$. Используя [свойство 5](#) и результат [примера 1](#), получаем:

$$c(\mathfrak{E}_a, \psi) = c(AS_1(0), \psi) = c(S_1(0), A\psi) = \|A\psi\|.$$

Так как

$$A\psi = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \psi_1 \\ \vdots \\ a_n \psi_n \end{pmatrix}, \quad \|A\psi\| = \sqrt{a_1^2 \psi_1^2 + \dots + a_n^2 \psi_n^2}.$$

то

$$c(\mathcal{Q}, \psi) = \sqrt{\alpha_1^2 \psi_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \psi_n^2}.$$

Доказать самостоятельно, что $c(\mathcal{Q}, \psi) = \sqrt{(\mathcal{Q}^{-1}\psi, \psi)}$.

5.5. Теорема о представлении наименьшей выпуклой оболочки компакта в форме пересечения полупространств. Свойства 11 - 14 опорной функции, вытекающие из этой теоремы

Рассматриваемая теорема, содержащая основной теоретический результат §5, показывает в какой степени множество определяется своей опорной функцией. Как мы видели в примерах [5.1 - 5.3](#), различные множества могут иметь одну и ту же опорную функцию. В [свойстве 10](#) утверждается, что опорные функции множества и его наименьшей выпуклой оболочки совпадают.

Теорема 5.1.

Пусть $F \in \Omega(E^n)$; $c(F, \psi)$ – опорная функция множества F ; $\psi \in E^n$. Тогда

$$\text{conv } F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$\Pi_\psi = \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(H, \psi)\}$ – замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью $\Gamma_\psi = \{x \in E^n : (x, \psi) = c(H, \psi)\}$ с вектором нормали $\psi \in S$;

$\Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$ – пересечение полупространств Π_ψ по всем векторам $\psi \in S$, где S – единичная сфера;

$H = \text{conv } F$ – наименьшая выпуклая оболочка множества F .

Тогда утверждение (7) теоремы 5.1 можно кратко записать в форме

$$H = \Pi. \quad (8)$$

Теорема утверждает, что наименьшая выпуклая оболочка H компакта F представляется в форме пересечения по векторам $\psi \in S$ полупространств Π_ψ , определяемых опорной функцией компакта F , т.е. $\text{conv } F$ определяется опорной функцией $c(F, \psi)$ компакта F .

Это значит, что по опорной функции $c(F, \psi)$ компакта F может быть однозначно восстановлен не сам компакт F , а только его наименьшая выпуклая оболочка $\text{conv } F$.

Доказательство

Обратимся к доказательству теоремы. Нужно установить равенство (8) – совпадение множеств H и Π .

1. Докажем сначала, что $H \subset \Pi$. Используя определение опорной функции и свойство 10, получаем, что для любой точки $x \in H$

$$(x, \psi) \leq \max_{h \in H} (h, \psi) = c(H, \psi) = c(F, \psi) \quad \forall \psi,$$

следовательно, $x \in \Pi_\psi \quad \forall \psi$, поэтому $x \in \Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$. Это доказывает включение

$$H \subset \Pi. \quad (9)$$

2. Докажем теперь включение

$$H \supset \Pi \quad (10)$$

методом от противного. Отметим, что множество $\Pi \neq \emptyset$, так как $F \neq \emptyset$ и $F \supset \Pi$ (почему?). Допустим, что (10) неверно, тогда существует точка $x_0 \in \Pi, x_0 \notin H$. Так как H – выпуклый компакт и $x_0 \notin H$, то по лемме об отделимости $\exists \psi_0 \in S : (h - x_0, \psi_0) < 0 \quad \forall h \in H$, т.е.

$$(h, \psi_0) < (x_0, \psi_0) \quad \forall h \in H.$$

Отсюда следует, что

$$c(H, \psi_0) = \max_{h \in H} (h, \psi_0) < (x_0, \psi_0),$$

причём неравенство здесь строгое, так как H – компакт. Отсюда, привлекая [свойство 10](#), получаем

$$c(F, \psi_0) = c(H, \psi_0) < (x_0, \psi_0),$$

т.е.

$$(x_0, \psi_0) > c(F, \psi_0). \quad (11)$$

С другой стороны, $x_0 \in \Pi = \bigcap_{\psi \in S} \Pi_\psi$, поэтому $x_0 \in \Pi_{\psi_0}$, следовательно,

$$(x_0, \psi_0) \leq c(F, \psi_0). \quad (12)$$

Сравнение неравенств (11) и (12) приводит к противоречию, которое доказывает включение (10).

3. Из включений (9) и (10) следует равенство (8), которое является краткой записью представления (7).

Теорема доказана.

Следствие из доказанной теоремы о представлении выпуклых компактов в форме пересечения полупространств.

Пусть $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$, тогда

$$F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F, \psi)\}. \quad (13)$$

Представление (13) показывает, что выпуклый компакт однозначно определяется своей опорной функцией, т.е. в случае $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$,

$$\boxed{F_1 = F_2} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in S} \quad (14)$$

Пример Найти алгебраическую сумму F двух шаров

$$F_1 = S_{r_1}(a_1), F_2 = S_{r_2}(a_2); \quad r_1, r_2 \geq 0, a_1, a_2 \in E^n.$$

Решение

Ясно, что $F_1, F_2, F \in \Omega(E^n)$. Найдём опорную функцию множества $F = F_1 + F_2$. Используя [свойство 7](#), результат [примера 4](#), получаем

$$c(F, \psi) = c(F_1 + F_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi) = (a_1 + a_2, \psi) + (r_1 + r_2) \|\psi\| = c(S_{r_1+r_2}(a_1+a_2), \psi).$$

Итак, два выпуклых компакта F и $S_{r_1+r_2}(a_1+a_2)$ имеют одинаковые опорные функции, следовательно, в силу (14) они совпадают, т.е. установлено правило алгебраического сложения двух шаров:

$$S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) = S_{r_1+r_2}(a_1+a_2).$$

При алгебраическом сложении шаров получается новый шар, причём складываются радиусы шаров и их центры.

Рассмотрим сейчас основанные на доказанной теореме свойства 11 - 14 опорных функций. В этих свойствах речь идёт о формулировке условий включения, непустоты пересечения двух множеств в терминах опорных функций этих множеств.

Свойство 11

Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{F_1 \subset F_2} \Rightarrow \boxed{c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{\text{conv } F_1 \subset \text{conv } F_2}.$$

Доказательство

Проверим первую импликацию. Если выполнено включение $F_1 \subset F_2$, то

$$c(F_1, \psi) = \max_{f \in F_1} (f, \psi) \leq \max_{f \in F_2} (f, \psi) = c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Проверим теперь вторую импликацию. Если выполнено неравенство $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi)$, то привлекая представление (7) доказанной выше теоремы, получаем:

$$\text{conv } F_1 = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F_1, \psi)\} \subset \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n : (x, \psi) \leq c(F_2, \psi)\} = \text{conv } F_2.$$

Следствие Для $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{F_1 \subset F_2} \Leftrightarrow \boxed{c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Замечание 5.2. В силу [свойства 2](#) опорных функций условие $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in E^n$ равносильно условию $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) \quad \forall \psi \in S$. Аналогичное замечание относится и к свойствам 11-14, приведенным ниже, и их следствиям.

Свойство 12

Пусть $f \in E^n, F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{f \in F} \Rightarrow \boxed{(f, \psi) \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{f \in \text{conv } F}.$$

Доказательство

Свойство 12 вытекает из свойства 11 при $F_1 = \{f\}, F_2 = F$.

Следствие Для $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{f \in F} \Leftrightarrow \boxed{(f, \psi) \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Свойство 13

Пусть $0 \in E^n, F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{0 \in F} \Rightarrow \boxed{0 \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{0 \in \text{conv } F}.$$

Доказательство

Свойство 13 вытекает из свойства 12 при $f = 0$.

Следствие Для $F \in \text{conv } \Omega(E^n)$

$$\boxed{0 \in F} \Leftrightarrow \boxed{0 \leq c(F, \psi) \quad \forall \psi \in E^n}.$$

Чрезвычайно важную роль в дальнейшем (при исследовании вопроса об управляемости и доказательстве принципа максимума) играет следующее свойство опорных функций.

Свойство 14

Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\boxed{F_1 \cap F_2 \neq \emptyset} \Rightarrow \boxed{c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n} \Rightarrow \boxed{(\text{conv } F_1) \cap (\text{conv } F_2) \neq \emptyset}.$$

Знаком \emptyset здесь обозначено пустое множество.

Доказательство

Докажем сначала первую импликацию. Условие $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ (непустота пересечения множеств F_1 и F_2) означает существование хотя бы одной общей точки у этих множеств: $\exists f \in E^n, f \in F_1, f \in F_2$. Тогда $(-f) \in (-F_2)$ и, в силу определения алгебраической суммы двух множеств, получаем: $f + (-f) \in F_1 + (-F_2)$, т.е. $0 \in F_1 + (-F_2)$. Первая часть свойства 13 влечет неравенство

$$c(F_1 + (-F_2), \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n,$$

которое в силу [свойства 7](#) принимает вид:

$$c(F_1, \psi) + c(-F_2, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n,$$

и, наконец, с помощью [свойства 5](#), окончательную форму:

$$c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n. \quad (15)$$

Докажем теперь вторую импликацию свойства 14. Пусть выполнено неравенство (15). Полагая $H_1 = \text{conv } F_1, H_2 = \text{conv } F_2$, и, привлекая [свойство 10](#), из неравенства (15) получаем

$$c(H_1, \psi) + c(-H_2, \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n.$$

Отсюда с помощью [свойств 5 и 7](#) приходим к неравенству

$$c(H_1 + (-H_2), \psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n. \quad (16)$$

Так как $H_1, H_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $H_1 + (-H_2) \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$. Поэтому в силу следствия из свойства 13 неравенство (16) равносильно условию $0 \in H_1 + (-H_2)$, из которого следует, что $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, т.е.

$$(\text{conv } F_1) \cap (\text{conv } F_2) \neq \emptyset.$$

Следствие Для $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$

$$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n$$

Покажем на примере, что последнее утверждение для невыпуклых компактов неверно. Пусть $F_1 = S_\varepsilon(0)$, $0 < \varepsilon < 1$; $F_2 = S$, тогда

$$c(F_1, \psi) + c(F_2, -\psi) = \varepsilon \|\psi\| + \|\psi\| = (1 + \varepsilon) \|\psi\| \geq 0, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

(шар радиуса ε с центром в нуле не пересекается с единичной сферой S).

5.6. Расстояние Хаусдорфа между множествами. Свойства 15, 16 опорной функции, связанные с расстоянием Хаусдорфа

Рассмотрим точку $x_0 \in \mathbb{E}^n$ и число $\varepsilon \geq 0$. ε -окрестностью точки x_0 называется шар $S_\varepsilon(x_0) = \{x_0\} + S_\varepsilon(0)$. Напомним, что $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{E}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. Пусть $r = \|x_0 - y_0\|$ – расстояние между двумя точками $x_0, y_0 \in \mathbb{E}^n$; тогда соотношения

- $x_0 \in \{y_0\} + S_\varepsilon(0)$,
- $y_0 \in \{x_0\} + S_\varepsilon(0)$,

выполняются для любого числа $\varepsilon \geq r$. причём

$$r = \min\{\varepsilon \geq 0 : x_0 \in \{y_0\} + S_\varepsilon(0), y_0 \in \{x_0\} + S_\varepsilon(0)\}.$$

Определение 5.2. ε -окрестностью множества $F \subset \mathbb{E}^n$ называется множество

$$F + S_\varepsilon(0) = \bigcup_{f \in F} S_\varepsilon(f).$$

Рассмотрим пример. Пусть $F = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ – квадрат, его ε -окрестность изображена на рис. 5.4.

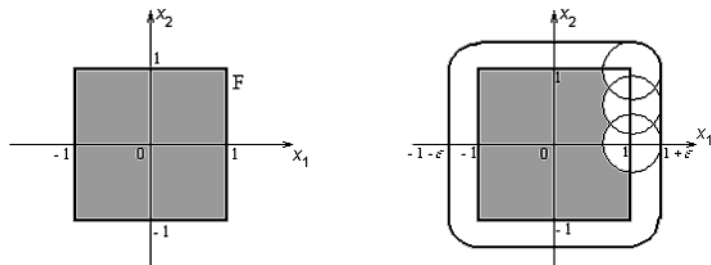


Рисунок 5.4.

Определение ε -окрестности множества F как объединения шаров $S_\varepsilon(f)$ по всем точкам $f \in F$ позволяет в плоском случае дать "механическое" описание процедуры построения ε -окрестности: если считать круг $S_\varepsilon(f)$ покрытым краской, то ε -окрестность множества F состоит из всех окрашенных точек плоскости, когда центр f этого круга пробегает все множество F .

Обратимся к определению расстояния между множествами. Рассмотрим в \mathbb{E}^n два ограниченных множества F_1, F_2 ; ясно, что существует такое число $R > 0$, что

$$F_1 \subset F_2 + S_R(0), \quad F_2 \subset F_1 + S_R(0).$$

Таких чисел R существует много, и можно поставить вопрос о выборе "наименьшего" из таких чисел, для которых оба записанные включения выполняются. На этом пути приходим к определению расстояния между множествами (расстояния Хаусдорфа).

Определение 5.3. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$. Расстоянием Хаусдорфа между множествами F_1 и F_2 называется неотрицательное число $h(F_1, F_2)$, определяемое формулой

$$h(F_1, F_2) = \min_{r \geq 0} \{r : F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0)\}. \quad (17)$$

Расстояние Хаусдорфа $h(F_1, F_2)$ определено для любых множеств $F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$.

Упражнение 5.4. Проверить, что расстояние $h(F_1, F_2)$ удовлетворяет трём аксиомам метрики метрического пространства:

- $h(F_1, F_2) \geq 0$; $h(F_1, F_2) = 0 \Leftrightarrow F_1 = F_2$;
- $h(F_1, F_2) = h(F_2, F_1)$ (симметричность);
- $h(F_1, F_3) \leq h(F_1, F_2) + h(F_2, F_3) \quad \forall F_1, F_2, F_3 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ (неравенство треугольника).

Упражнение 5.5. Установить для модуля $|F| = \max_{f \in F} \|f\|$ множества $F \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ формулу

$$|F| = h(\{0\}, F).$$

Найдём расстояние Хаусдорфа между кругом $F_1 = S_1(0)$ и квадратом $F_2 = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ на плоскости. Очевидно, что $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ для любого $r \geq 0$, так как $F_1 \subset F_2$. Далее, $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ для любого $r \geq \sqrt{2} - 1$, так как $F_1 + S_r(0) = S_{1+r}(0)$, и минимальное значение r , для которого выполняется включение $F_2 \subset S_{1+r}(0)$, равно $\sqrt{2} - 1$. Следовательно,

$$h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1.$$

Замечание 5.3. Расстояние Хаусдорфа можно определить для любых множеств из \mathbb{E}^n , заменив в формуле (17) знак \min знаком \inf .

Пример 5.5. Пусть $F_1 = S_1(0)$ (замкнутый круг) и $F_2 = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ (открытый круг). Покажем, что $h(F_1, F_2) = 0$. Действительно, $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ при любом $r \geq 0$, так как $F_2 \subset F_1$. Включение $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ выполняется при любом $r > 0$. Поэтому

$$h(F_1, F_2) = \inf_{r \geq 0} \{r : F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0)\} = 0.$$

Пример 5.6. Пусть $F_1 = \{x_2 = 0\}$ (прямая) и $F_2 = \{x_2 = \arctg x_1\}$ (график арктангенса). Эти множества замкнуты, но не ограничены,

$$h(F_1, F_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим в заключение два свойства опорных функций, связанных с расстоянием Хаусдорфа.

Свойство 15 (условие Липшица по первому аргументу)

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq \|\psi\| h(F_1, F_2) \quad \forall F_1, F_2 \in \Omega(\mathbb{E}^n). \quad (18)$$

Здесь множитель $\|\psi\|$ играет роль константы Липшица.

Доказательство

Из определения расстояния Хаусдорфа следует включение $F_1 \subset F_2 + S_{h(F_1, F_2)}(0)$. Отсюда, привлекая [свойство 11](#) (часть 1), [свойство 7](#) и [пример 2](#) из п.5.4, получаем:

$$c(F_1, \psi) \leq c(F_2 + S_{h(F_1, F_2)}(0), \psi) = c(F_2, \psi) + \|\psi\| h(F_1, F_2),$$

т.е.

$$c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi) \leq \|\psi\| h(F_1, F_2).$$

Если поменять ролями множества F_1 и F_2 , то, в силу симметрии расстояния Хаусдорфа, получим неравенство

$$c(F_2, \psi) - c(F_1, \psi) \leq \|\psi\| h(F_1, F_2).$$

Из двух последних неравенств следует неравенство (18).

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по первому аргументу, т.е. $c(F', \psi) \rightarrow c(F, \psi)$, $h(F, F') \rightarrow 0$. Здесь $F', F \in \Omega(\mathbb{E}^n), \psi \in \mathbb{E}^n$.

Следствие Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по совокупности аргументов, т.е. $c(F', \psi') \rightarrow c(F, \psi)$ при $h(F, F') + \|\psi' - \psi\| \rightarrow 0$. Здесь $F', F \in \Omega(\mathbb{E}^n), \psi', \psi \in \mathbb{E}^n$.

Упражнение 5.6. Доказать последнее утверждение.

Свойство 16 (вычисление расстояния Хаусдорфа между выпуклыми компактными множествами при помощи опорных функций этих компактов)

Пусть $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$. Тогда имеет место формула

$$h(F_1, F_2) = \max_{\psi \in S^1} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)|. \quad (19)$$

Доказательство

Полагая $M = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)|$, перепишем (19) в форме

$$h(F_1, F_2) = M. \quad (20)$$

Докажем сначала, что

$$h(F_1, F_2) \geq M. \quad (21)$$

Из свойства 15 следует неравенство

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq h(F_1, F_2) \quad \forall \psi \in S,$$

которое в силу определения числа M влечет (21).

Докажем теперь, что

$$h(F_1, F_2) \leq M. \quad (22)$$

Из определения числа M следует, что

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq M \quad \forall \psi \in S,$$

или

$$\left| c\left(F_1, \frac{\psi}{\|\psi\|}\right) - c\left(F_2, \frac{\psi}{\|\psi\|}\right) \right| \leq h(F_1, F_2) \quad \forall \psi \in E^n, \psi \neq 0.$$

Умножив почленно последнее неравенство на $\|\psi\|$ и привлекая [свойство 2](#), получаем

$$|c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| \leq M \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n,$$

или

$$-M \|\psi\| \leq c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi) \leq M \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n. \quad (23)$$

Используя правую часть последнего неравенства, [свойство 7](#), получаем

$$c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi) + c(S_M(0), \psi) = c(F_2 + S_M(0), \psi) \quad \forall \psi \in E^n.$$

Так как компакты F_1 и $F_2 + S_M(0)$ выпуклы, то по [следствию из свойства 11](#) опорных функций последнее соотношение влечёт включение

$$F_1 \subset F_2 + S_M(0). \quad (24)$$

Левая часть неравенства (23) при помощи аналогичных рассуждений приводит к включению

$$F_2 \subset F_1 + S_M(0). \quad (25)$$

Итак, для числа M одновременно выполняются включения (24) и (25), и определение расстояния Хаусдорфа (17) приводит к обоснованию неравенства (22). Из (21) и (22) вытекает требуемое равенство (20).

Замечание 5.4. Формула (19) доказана для выпуклых компактов. Приведем пример, показывающий, что без условия выпуклости эта формула неверна. Пусть $n = 2$,

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

– множества, каждое из которых состоит из двух точек. Ясно, что включения

$$F_2 \subset F_1 + S_r(0), F_1 \subset F_2 + S_r(0)$$

выполняются лишь при $r \geq \sqrt{2}$, поэтому $h(F_1, F_2) = \sqrt{2}$. С другой стороны,

$$M = \max_{\psi \in S} |c(F_1, \psi) - c(F_2, \psi)| = \max_{\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1} |\psi_1| - |\psi_2| = 1.$$

Таким образом, $h(F_1, F_2) = \sqrt{2} > 1 = M$. т.е. формула (19) для рассматриваемых невыпуклых компактов F_1 и F_2 неверна.

В заключение рассмотрим пример применения формулы (19) для нахождения расстояния между двумя шарами $S_{r_1}(a_1)$ и $S_{r_2}(a_2)$; $a_1, a_2 \in \mathbb{E}^n$, $r_1, r_2 \geq 0$. Имеем:

$$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = \max_{\psi \in S^1} |c(S_{r_1}(a_1), \psi) - c(S_{r_2}(a_2), \psi)| =$$

$$= \max_{\|\psi\|=1} |(a_1 - a_2, \psi) + (r_1 - r_2) \|\psi\| | = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|.$$

Мы закончили рассмотрение основных свойств опорных функций, которые являются удобным аналитическим аппаратом для описания выпуклых компактов.

Лекция 6

§ 6. Интегралы. Три теоремы об интегралах

[Теорема 6.1](#) – о внесении знака опорной функции под знак интеграла, [Теорема 6.2](#) – об основных свойствах интеграла, [Теорема 6.3](#) – о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела интегрирования

6.1. Краткое введение

Мы уже знакомы с постановкой линейной задачи быстрогодействия, компактная запись которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1)$$

Постановка линейной задачи быстрогодействия требует задания следующего набора исходных данных $(A, M_0, M_1, \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U)$, где A – матрица системы, M_0 – множество начальных состояний объекта, M_1 – множество конечных состояний объекта, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U$ – класс допустимых управлений, U – область управления. Напомним, что начальный момент времени t_0 считается фиксированным. Класс допустимых управлений

$$\mathcal{Y} = \left\{ u(s) \mid \begin{array}{l} 1) \quad \forall s: u(s) \in U \\ 2) \quad u(s) \text{ интегрируемая функция} \end{array} \right\}$$

состоит из векторных функций $u(s)$ скалярного аргумента s , принимающих значения из заданного множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, причём каждая из этих функций $u(s)$ интегрируема. При изучении задачи быстрогодействия (1) важную роль играет множество достижимости $X(t_0, t, M_0) = X(t)$, которое может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} X(t_0, t, M_0) &= e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \quad t_0 < t; \\ X(t_0, t_0, M_0) &= M_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Множество $X(t)$, как показывает правая часть равенства (2), является алгебраической суммой двух множеств. На основании [свойства 7](#) опорных функций (аддитивность по первому аргументу) опорную функцию множества достижимости $X(t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$c(X(t), \mathcal{Y}) = c(e^{(t-t_0)A} M_0, \mathcal{Y}) + c\left(\int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{Y} ds, \mathcal{Y}\right). \quad (3)$$

Последнее слагаемое в формуле (3) представляет собой опорную функцию от множества, определяемого интегралом. Возникает вопрос о том, как опорная функция интеграла выражается через опорную функцию компакта U , входящего в описание класса $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_U$ допустимых управлений. Ответ на поставленный вопрос даёт рассмотренная ниже теорема 6.1. Теоремы 6.2 и 6.3 дают описание некоторых свойств интеграла.

Напомним определение интеграла

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds \quad (4)$$

от класса допустимых управлений.

Определение 6.1. Пусть $D(s)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица; $t_0 < t$; интеграл (4) определяется равенством

$$\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds, u(s) \in \mathcal{Y} \right\} = \bigcup_{u(s) \in \mathcal{Y}} \left\{ \int_{t_0}^t D(s) u(s) ds \right\}.$$

Интеграл (4) является множеством, лежащим в пространстве \mathbb{R}^n .

Упражнение 6.1. Пусть $n = 1$, $D(s) = 1$, $t_0 = 0$, $0 < t$, $U = [-1, 1]$. Показать, что

$$\int_0^t 1 \cdot \mathcal{Y} ds = [-t, t], \quad \int_0^2 1 \cdot \mathcal{Y} ds = [-2, 2].$$

6.2. Теорема 6.1 (о внесении знака опорной функции под знак интеграла).

Теорема 6.1.

Пусть

- $U \in \Omega(\mathbb{E}^n)$,
- $D(s)$ — непрерывная $(n \times n)$ -матрица,
- $\mathcal{Y} = \{u(s) \mid 1) \forall s: u(s) \in U, 2) u(s) \text{ — интегрируемая функция}\}$ — класс допустимых управлений.

Рассмотрим множество

$$X = \int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds, \quad t_0 < t. \quad (5)$$

Тогда имеет место равенство:

$$c \left(\int_{t_0}^t D(s) \mathcal{Y} ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds, \quad \psi \in \mathbb{E}^n. \quad (6)$$

Доказательство

? Введем обозначения:

$a = c(X, \psi)$ — левая часть равенства (6).

$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds$ — правая часть равенства (6).

Тогда утверждение теоремы 6.1 кратко запишется в форме

$$a = b. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 6.1 проводится по следующей схеме:

1. $\exists a$
 2. $\exists b$
 3. $a \leq b$
 4. $a \geq b$
- $\left. \begin{array}{l} 3. \\ 4. \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$

Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения (леммы 6.1, 6.2).

Лемма 6.1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ — $(n \times n)$ -матрица, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор из \mathbb{E}^n . Справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j^j)^2}. \quad (8)$$

Доказательство

Действительно, пусть $a^i = (a_1^i \dots a_n^i)$ — i -ая строка матрицы A . Тогда

$$\|Ax\| = \sqrt{(a^1, x)^2 + \dots + (a^n, x)^2} \leq \sqrt{\|a^1\|^2 \|x\|^2 + \dots + \|a^n\|^2 \|x\|^2} =$$

$$= \|x\| \sqrt{\|a^1\|^2 + \dots + \|a^n\|^2} = \|x\| \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j^j)^2}.$$

т.к. $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}$, $Ax = \begin{pmatrix} (a^1, x) \\ \dots \\ (a^n, x) \end{pmatrix}$, что доказывает лемму 6.1.

Рассмотрим теперь квадратную матрицу порядка n

$$D(s) = \begin{pmatrix} d_1^1(s) & \dots & d_n^1(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1^n(s) & \dots & d_n^n(s) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящую от $s \in [t_0, t]$; каждый ее элемент $d_j^i(s)$ является непрерывной функцией аргумента $s \in [t_0, t]$. Положим,

$$\omega_j^i(\delta) = \sup_{|s_1 - s_2| \leq \delta, s_1, s_2 \in [t_0, t]} |d_j^i(s_1) - d_j^i(s_2)|, \quad i, j = 1, \dots, n; \delta > 0.$$

Функция $\omega_j^i(\delta)$ аргумента $\delta > 0$, называемая *модулем непрерывности* функции $d_j^i(s)$, удовлетворяет условию $\omega_j^i(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ (это следует из равномерной непрерывности на отрезке $[t_0, t]$ функции $d_j^i(s)$, которая предполагается непрерывной на этом отрезке). Положим

$$\omega(\delta) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n [\omega_j^i(\delta)]^2}.$$

Ясно, что $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Лемма 6.2.

Пусть $s_1, s_2 \in [t_0, t], \delta > 0; |s_1 - s_2| \leq \delta; \psi \in E^n, u \in U$. Имеют место неравенства

$$|c(D(s_1)U, \psi) - c(D(s_2)U, \psi)| \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta), \quad (9)$$

$$|(D(s_1)u, \psi) - (D(s_2)u, \psi)| \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta), \quad (10)$$

правая часть которых стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство

Действительно, привлекая свойства опорных функций, последовательно получаем

$$\begin{aligned} |c(D(s_1)U, \psi) - c(D(s_2)U, \psi)| &= \{ \text{свойство 5, пар. 5} \} \\ &= |c(U, D^*(s_1)\psi) - c(U, D^*(s_2)\psi)| \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{свойство 4 §5} \\ |U| \cdot \max_{\psi} \|\psi\| - \text{модуль компакта} \end{array} \right\} \\ &\leq |U| \cdot \| [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi \| \leq \{ \text{лемма 6.1.} \} \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \sqrt{\sum_{i,j=1}^n [d_j^i(s_1) - d_j^i(s_2)]^2} \leq \{ \text{определение функции } \omega(\delta) \} \end{aligned}$$

Неравенство (9) доказано. Неравенство (10) доказывается аналогично:

$$\begin{aligned} |(D(s_1)u, \psi) - (D(s_2)u, \psi)| &= \\ &= |(u, [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi)| \leq \\ &\leq \|u\| \cdot \| [D(s_1) - D(s_2)]^* \psi \| \leq \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(|s_1 - s_2|) \leq \\ &\leq |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta). \end{aligned}$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы 6.1 по указанной выше схеме 1), 2), 3), 4).

1) Эа. Чтобы проверить утверждение 1) для величины $\alpha = c(X, \psi)$ (при любом фиксированном векторе $\psi \in E^n$), мы покажем, что множество X непусто и ограничено.

Проверим сначала, что $X \neq \emptyset$. Множество

$$X = \int_{t_0}^t D(s)Y ds = \left\{ x \in E^n : x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, u(s) \in Y \right\}$$

непусто, так как множество U непусто и существует точка $u_* \in U$; управление $u_*(s) \equiv u_* \forall s$ является допустимым ($(u_*(s)) \in Y$) и

$$\text{точка } x_* \equiv \int_{t_0}^t D(s)u_*(s) ds \in X.$$

Для доказательства ограниченности множества X возьмем любую точку $x \in X$. Точку x можно представить в форме

$$x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds \in X, \quad \text{где } u(s) \in Y, u(s) \in U \text{ при любом } s \in [t_0, t]. \text{ Следовательно,}$$

$$\|x\| \leq \int_{t_0}^t \|D(s)u(s)\| ds \leq \{ \text{лемма 6.1} \} \leq \int_{t_0}^t \|u(s)\| \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (d_j^i(s))^2} ds \leq R.$$

где $R = (t - t_0) |U| \max_{s \in [t_0, t]} \sqrt{\sum_{j=1}^n (d_j^i(s))^2}$.

Таким образом, $\exists R > 0: X \subset S_R(0)$.

Ограниченность множества X доказана.

Следовательно, при каждом $\psi \in E^n$ величина $a = c(X, \psi)$ определена и принимает конечное значение. Утверждение 1) доказано.

2) $\exists b$. Чтобы проверить утверждение 2) для величины

$$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds$$

(при любом фиксированном векторе $\psi \in E^n$), перепишем последнюю формулу в виде

$$b = \int_{t_0}^t c(U, D^*(s)\psi) ds. \quad (11)$$

Существование интеграла (11) следует из непрерывности подынтегральной функции по переменной интегрирования $s \in [t_0, t]$. Непрерывность подынтегральной функции по s вытекает из непрерывности опорной функции по второму аргументу, непрерывности $D^*(s)\psi$ по s и теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций. Заметим, что непрерывность функции $c(D(s)U, \psi)$ по s следует также из неравенства (9). Проверка утверждения 2) закончена.

3) $a \leq b$. Любая точка $x \in X = \int_{t_0}^t D(s)Y ds$ допускает представление

$$x = \int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, \quad u(s) \in Y.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (x, \psi) &= \left(\int_{t_0}^t D(s)u(s) ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t (D(s)u(s), \psi) ds = \\ &= \int_{t_0}^t (u(s), D^*(s)\psi) ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t c(U, D^*(s)\psi) ds = \\ &= \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi) ds \equiv b. \end{aligned}$$

См. определение [опорной функции](#) и [свойство 5, пар.5](#)

Итак, $(x, \psi) \leq b \quad \forall x \in X$. Следовательно, $\forall \psi \in E^n$

$$a \equiv c(X, \psi) = \sup_{x \in X} (x, \psi) \leq b.$$

Утверждение 3) доказано.

Проведем теперь наиболее трудную часть доказательства теоремы 6.1 – проверку утверждения

4)

$$a \geq b. \quad (12)$$

Неравенство (12) вытекает из следующей леммы 6.3.

Лемма 6.3.

Для любого натурального N имеет место неравенство

$$a \geq b - \varepsilon_N. \quad (13)$$

где $\varepsilon_N > 0, \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Лемма 6.4.

Для любого натурального N

$$\exists x_N \in X : (x_N, \Psi) \geq b - \varepsilon_N, \quad (14)$$

где $\varepsilon_N > 0, \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Очевидно, что

лемма 6.4 \Rightarrow лемма 6.3 \Rightarrow неравенство (12).

Действительно,

$$a = c(X, \Psi) = \sup_{x \in X} (x, \Psi) \geq (x_N, \Psi) \geq b - \varepsilon_N,$$

т.е. $a \geq b - \varepsilon_N \forall N$, и переход к пределу при $N \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве (a и b от N не зависят, а $\varepsilon_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$) приводит к интересующему нас неравенству (12). Таким образом, для доказательства (12) остаётся установить утверждение леммы 6.4.

Лемма 6.5.

Имеет место утверждение леммы 6.4, причем в (14) точка x_N допускает представление

$$\int_{t_0}^t D(s) u_N(s) ds, \quad (15)$$

где $u_N(s)$ – кусочно–постоянное допустимое управление ($u_N(s) \in \mathcal{U}$), а число ε_N определяется равенством

$$\varepsilon_N = 2(t - t_0) \cdot \|U\| \cdot \|\Psi\| \cdot \omega\left(\frac{t - t_0}{N}\right), \quad (16)$$

причём при $N \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_N \rightarrow 0. \quad (17)$$

Доказательство

леммы 6.5, которое мы сейчас проведём, состоит из двух частей:

(α) построение управления $u_N(s), t_0 \leq s \leq t$;

(β) проверка требуемых утверждений (14)–(17).

(α) Опишем сначала построение управления $u_N(s)$. Пусть N – натуральное число; разобьём отрезок $[t_0, t]$ на N равных частей точками

$$t_0 \equiv t^0 < t^1 < \dots < t^N \equiv t,$$

где $t^{j+1} - t^j = \frac{t - t_0}{N} \equiv \delta > 0, \delta = \delta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ (рис. 6.1).

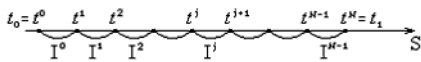


Рисунок 6.1.

Определим множества $I^0 = [t^0, t^1], I^1 = [t^1, t^2], \dots, I^j = [t^j, t^{j+1}], \dots, I^{N-1} = [t^{N-1}, t^N]$. Напомним, что число b определяется интегралом, стоящим в правой части формулы (6). Подынтегральная функция этого интеграла при $s = t^j, j = 0, 1, \dots, N-1$, представима в форме

$$c(D(t^j)U, \Psi) = (D(t^j)u^j, \Psi), \quad \text{где } u^j \in U. \quad (18)$$

Действительно, так как $U \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, то

$$c(D(t^j)U, \Psi) = c(U, D^*(t^j)\Psi) = \max_{u \in U} (u, D^*(t^j)\Psi) = (u^j, D^*(t^j)\Psi) = (D(t^j)u^j, \Psi), \quad u^j \in U.$$

Привлекая выделенные выше точки u^j , определим кусочно–постоянное управление $u_N(s), s \in [t_0, t]$:

$$u_N(s) = \begin{cases} u^0, s \in I^0, \\ u^1, s \in I^1, \\ \dots \\ u^j, s \in I^j, \\ \dots \\ u^{N-1}, s \in I^{N-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Ясно, что построенное управление $u_N(s) \in \mathcal{U}$, так как функция $u_N(s)$ – интегрируема и принимает значения из компакта U при любом $s \in [t_0, t]$.

(β) Проверим утверждения (14)-(17). Так как управление (18) допустимо, то точка x , определяемая равенствами (15), (19) принадлежит множеству X . Представим левую часть неравенства (14) в форме

$$(x_N, \psi) = (15) = \left(\int_{t_0}^t D(s)u_N(s)ds, \psi \right) = \int_{t_0}^t (D(s)u_N(s), \psi)ds = (19) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{I^j} (D(s)u^j, \psi)ds,$$

а число b , входящее в правую часть неравенства (14), в форме

$$b = \int_{t_0}^t c(D(s)U, \psi)ds = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{I^j} c(D(s)U, \psi)ds. \quad (21)$$

Из (20), (21) получаем вычитанием:

$$(x_N, \psi) - b = \sum_{j=0}^{N-1} R_j, \quad (22)$$

$$\text{где } R_j = \int_{I^j} [(D(s)u^j, \psi) - c(D(s)U, \psi)]ds.$$

Оценим сверху величину $|R_j|$. Привлекая (22), (18), получаем

$$\begin{aligned} R_j &= \int_{I^j} [(D(s)u^j, \psi) - (D(t^j)u^j, \psi) + \\ &+ \underbrace{(D(t^j)u^j, \psi) - c(D(t^j)U, \psi)}_{=0 \text{ по (18)}} + \\ &+ c(D(t^j)U, \psi) - c(D(s)U, \psi)]ds, \end{aligned}$$

откуда с помощью [леммы 6.2](#) приходим к оценке

$$|R_j| \leq 2(t^{j+1} - t^j) \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(t^{j+1} - t^j).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_j| \leq 2N\delta \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega(\delta) = 2(t - t_0) \cdot |U| \cdot \|\psi\| \cdot \omega\left(\frac{t - t_0}{N}\right) \equiv \varepsilon_N, \quad (23)$$

причём $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, так как $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом, из (23), (22) получаем, что $|(x_N, \psi) - b| \leq \varepsilon_N$, или

$$-\varepsilon_N \leq (x_N, \psi) - b \leq \varepsilon_N.$$

Левая часть последнего неравенства приводит к неравенству (14). Лемма 6.5 доказана полностью, неравенство (12) обосновано.

Доказательство теоремы 6.1 закончено.

6.3. Теорема 6.2 (об основных свойствах интеграла)

Теорема 6.2. (об основных свойствах интеграла)

Пусть $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $D(s)$ – непрерывная $(n \times n)$ -матрица,

$$\text{класс допустимых управлений } \mathcal{U} = \left\{ u(s) \left| \begin{array}{l} 1) \forall s: u(s) \in U, \\ 2) u(s) \text{ - интегрируемая по Лебегу функция} \end{array} \right. \right\}$$

состоит из интегрируемых по Лебегу функций, принимающих значения из компакта U .

Тогда множество

$$X = \int_{\mathcal{U}} D(s)Y ds \quad (\text{интеграл})$$

обладает следующими свойствами

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } X \text{ непусто,} \\ \text{б) } X \text{ ограничено,} \\ \text{в) } X \text{ замкнуто,} \\ \text{г) } X \text{ выпукло.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} X \in \Omega(\mathbb{E}^n) \\ X \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n). \end{array}$$

Утверждения а), б) теоремы 6.2 легко проверяются (см. [доказательство теоремы 6.1](#)), утверждения в), г) приводятся без доказательства.

Замечание 6.1. В теореме 6.2 не предполагается выпуклости компакта U ; при этом интеграл X оказывается всегда выпуклым. Проиллюстрируем это обстоятельство примером.

Пример 6.1. Пусть $n=1$, $D(s)=1$, $U = (-1,+1)$ – множество, состоящее из двух точек -1 и $+1$ (U – невыпуклое множество).

Найти множество $X = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot Y ds$.

Решение

Класс допустимых управлений \mathcal{U} содержит управления

$$u_0(s) \equiv -1, \quad u_1(s) \equiv +1, \quad u_\tau(s) = \begin{cases} +1, & 0 \leq s < \tau, \\ -1, & \tau < s \leq 1. \end{cases}$$

(кроме этих управлений в \mathcal{U} содержится много других управлений, которые, однако, для построения интеграла X не потребуются), а множество X (интеграл) содержит точки

$$x_0 = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_0(s) ds = -1, \quad x_1 = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_1(s) ds = +1, \quad x_\tau = \int_{\mathcal{U}} 1 \cdot u_\tau(s) ds = 2\tau - 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Из рис. 6.2 ясно, что отрезок $[-1,+1] \subset X$, и так как для любой точки $x \in X$, представимой в форме $x = \int_{\mathcal{U}} u(s) ds, |u(s)|=1$ имеем

$|x| = \left| \int_{\mathcal{U}} u(s) ds \right| \leq 1$, то

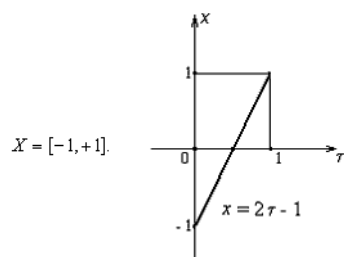


Рисунок 6.2.

Построенное в этом примере множество $X = [-1,+1]$ выпукло, хотя компакт $U = (-1,+1)$ выпуклым не является.

В примере 6.1 интеграл X был найден на основании определения интеграла. Нахождение интегралов на основании определения, требующее перебора всех допустимых управлений из \mathcal{U} , весьма неудобно для приложений. Здесь ситуацию можно сравнить с задачей вычисления интеграла Римана от функции действительного переменного: вычисление интеграла Римана на основании определения с помощью интегральных сумм в известном смысле неудобно для практики, и в ряде случаев интеграл удобно вычислять с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Теоремы 6.1 и 6.2 позволяют находить интегралы от класса допустимых управлений по следующей схеме: сначала вычисляется опорная функция интеграла, а затем по опорной функции восстанавливается интеграл. Покажем, как эта схема применяется в конкретных задачах.

Пример 6.2. Пусть $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D(s) = e^{-sA}$, $U = S_1(0)$. Найти интеграл $X = \int_{\mathcal{U}} D(s)Y ds$.

Решение

В силу теоремы 6.2 множество $X(T)$ является выпуклым компактом. Найдём сначала его опорную функцию, привлекая теорему 6.1 о внесении знака опорной функции под знак интеграла:

$$c(X(T), \psi) = (\text{теорема 6.1.}) = \int_0^T c(e^{-sA}U, \psi) ds = \{ \text{свойство 5} \} = \\ = \int_0^T c(U, e^{-sA}\psi) ds = \int_0^T \|e^{-sA}\psi\| ds = \int_0^T \|\psi\| ds = T \|\psi\| = c(S_T(0), \psi).$$

Итак, два выпуклых компакта $X(T)$ и $S_T(0)$ имеют одинаковые опорные функции, отсюда, на основании свойства опорных функций, следует совпадение этих множеств:

$$X(T) = S_T(0),$$

т.е. интеграл $X(T)$ является кругом радиуса T с центром в начале координат.

Выше мы воспользовались равенством $\|e^{-sA}\psi\| = \|\psi\|$; геометрический смысл этого равенства состоит в том, что длина вектора при повороте его на угол s сохраняется. Для прямого доказательства этого равенства положим $\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ и вычислим

$$e^{-sA}\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos(s-\alpha) \\ -\sin(s-\alpha) \end{pmatrix};$$

поэтому

$$\|e^{-sA}\psi\| = \|\psi\| \sqrt{\cos^2(s-\alpha) + \sin^2(s-\alpha)} = \|\psi\|.$$

Пример 6.3. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = (-v, v), v \in \mathbb{E}^2$. Найти интеграл $X = \int_0^\pi e^{-sA}U ds$.

Решение

Действуя по той же схеме, получаем:

$$c(X, \psi) = \int_0^\pi c(U, e^{-sA}\psi) ds = \int_0^\pi |(v, e^{-sA}\psi)| ds,$$

так как $c((-v, v), \psi) = |(v, \psi)|$. Полагая

$$\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, v = \|v\| \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix},$$

находим

$$e^{-sA}\psi = \|\psi\| \begin{pmatrix} \cos(s-\alpha) \\ -\sin(s-\alpha) \end{pmatrix}, (v, e^{-sA}\psi) = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \cos(s-\alpha+\beta).$$

Следовательно,

$$c(X, \psi) = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \int_0^\pi |\cos(s-\alpha+\beta)| ds = \|v\| \cdot \|\psi\| \cdot \int_0^\pi |\cos s| ds = 2\|v\| \cdot \|\psi\| = c(S_{2\|v\|}(0), \psi)$$

и

$$X = S_{2\|v\|}(0).$$

Заметим, что правая часть формулы (6), в отличие от примеров 6.2, 6.3, не всегда может быть найдена аналитически (на основе формулы Ньютона–Лейбница). В таких случаях интеграл в правой части формулы (6) может быть приближённо вычислен при фиксированном ψ методами численного интегрирования.

6.4. Теорема 6.3 (о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела)

Теорема 6.3. (о непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела)

При выполнении условий [теоремы 6.2](#) множество

$$X(t) = \int_a^t D(s) \mathcal{U} ds$$

непрерывно зависит от аргумента t , т.е. Хаусдорфово расстояние $h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0$ при $t' \rightarrow t$.

Доказательство

Действительно, в силу [теоремы 6.2](#) множества $X(t')$, $X(t)$ являются выпуклыми компактными и расстояние Хаусдорфа между ними можно выразить в терминах их опорных функций ([свойство 16](#) опорных функций). Опорные функции этих множеств можно найти с помощью [теоремы 6.1](#). Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} h(X(t'), X(t)) &= (\text{свойство 16} \cdot \beta 5) = \max_{\psi \in S} |c(X(t'), \psi) - c(X(t), \psi)| = (\text{теорема 6.1}) = \\ &= \max_{\psi \in S} \left| \int_a^t c(D(s) \mathcal{U}, \psi) ds \right| \leq \max_{\psi \in S} \left| \int_a^t |c(\mathcal{U}, D^*(s) \mathcal{U})| ds \right| \leq \max_{\psi \in S} |t - t'| \cdot \|\mathcal{U}\| \cdot \max_{|s-t| \leq \delta} \sqrt{\sum_{j=1}^n [d_j^i(s)]^2} \cdot \|\psi\| = \\ &= \text{const} \cdot |t' - t| \rightarrow 0 \text{ при } t' \rightarrow t. \end{aligned}$$

Итак, закончено изложение вспомогательного материала, который будет использоваться для изучения линейной задачи быстрого действия.

Лекция 7

§ 7. Постановка линейной задачи быстродействия

Рассмотрим линейную задачу быстродействия в E^n :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases}$$

Здесь x – вектор фазовых координат объекта, A – матрица системы, u – управление, M_0, M_1 – множества начальных и конечных состояний объекта; класс допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U = \{u(s) \mid 1) \forall s: u(s) \in U, 2) u(s) \text{ – интегрируемая функция}\}$

состоит из функций $u(s)$ скалярного аргумента s , принимающих значения из множества $U \in \Omega(E^n)$ и интегрируемых по Лебегу. Множество U называется областью управления. Начальный момент времени t_0 фиксирован.

Требуется найти допустимое управление, которое обеспечивает перевод объекта из множества M_0 в множество M_1 за минимальное время. Управление, решающее эту задачу, будем называть *оптимальным (по быстродействию)*.

Основные вопросы линейной теории быстродействия (управляемость, необходимые условия оптимальности, достаточные условия оптимальности, существование оптимального управления) рассмотрены ниже в §§10-15.

Напомним, что матрицу A мы считаем постоянной. Постановка линейной задачи быстродействия требует задания следующего набора исходных данных:

$$\{A, M_0, M_1, \mathcal{U} = \mathcal{U}_U, t_0\}.$$

§ 8. Основные свойства множества достижимости и множества управляемости

Эти множества введены в [§3](#), где мы установили следующее свойство.

Свойство 1 (представление множеств $X(t)$ и $Z(t)$ на основе формулы Коши)

$$X(t) \equiv X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathcal{U} ds, \quad t_0 < t, \quad (1)$$

$$Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A} M_1 + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A} (-\mathcal{U}) ds, \quad t < t_1, \quad (2)$$

$$X(t_0) \equiv X(t_0, t_0, M_0) = M_0,$$

$$Z(t_1) \equiv Z(t_1, t_1, M_1) = M_1.$$

На формулах (1) и (2) основано изучение ряда простейших свойств множеств $X(t), Z(t)$, приведённых ниже.

Свойство 2 (опорная функция множеств $X(t)$ и $Z(t)$)

$$c(X(t), \psi) = c(e^{(t-t_0)A} M_0, \psi) + \int_{t_0}^t c(e^{(t-s)A} \mathcal{U}, \psi) ds, \quad (3)$$

$$c(Z(t), -\psi) = c(e^{(t-t_1)A} M_1, -\psi) + \int_t^{t_1} c(e^{(t-s)A} \mathcal{U}, \psi) ds. \quad (4)$$

Для получения формул (3), (4) следует использовать представление рассмотренных множеств в виде алгебраической суммы двух множеств (см. (1), (2), [свойство 7](#) аддитивности опорной функции по первому аргументу) (§ 5) и [теорему 6.1](#), § 6, о внесении знака опорной функции под знак интеграла. Используя [свойство 5, § 5](#), опорных функций, формулы (3), (4) можно записать в виде

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A} \psi) + \int_{t_0}^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds, \quad (5)$$

$$c(Z(t), -\psi) = c(M_1, -e^{(t-t_1)A} \psi) + \int_t^{t_1} c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds. \quad (6)$$

В правые части формул (5), (6) входят опорные функции множеств U, M_0, M_1 и матрица A , другими словами, опорные функции множеств достижимости и управляемости выражены в терминах исходных данных рассматриваемой линейной задачи быстрогодействия.

Свойство 3.

Если $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $X(t), Z(t) \in \Omega(\mathbb{E}^n)$;

если $M_0, M_1 \in \text{conv} \Omega(\mathbb{E}^n)$, то $X(t), Z(t) \in \text{conv} \Omega(\mathbb{E}^n)$.

Действительно, множества $X(t)$ и $Z(t)$, в соответствии с формулами (1), (2), являются алгебраической суммой двух множеств. Вторые слагаемые (интегралы) по [теореме 6.2](#) являются выпуклыми компактами. Первые слагаемые, представляющие собой линейное преобразование компактов M_0, M_1 , являются компактами (проверить, что умножение матрицы на компакт даёт компакт; умножение матрицы на выпуклый компакт приводит к выпуклому компакт). Алгебраическая сумма двух компактов является компактом; алгебраическая сумма двух выпуклых компактов является выпуклым компактом. Эти соображения приводят к обоснованию свойства 3.

Замечание 8.1. Для одноточечных множеств M_0, M_1 множества $X(t), Z(t)$ являются выпуклыми компактами.

Свойство 4 (непрерывная зависимость множеств X(t) и Z(t) от времени t)

При $t' \rightarrow t$

$$h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0, \quad h(Z(t'), Z(t)) \rightarrow 0.$$

Упражнение 8.1. Доказать свойство 4, привлекая формулы (1), (2) и [теорему 6.3](#), § 6.

§ 9. Сопряжённое уравнение. Сопряжённая переменная. Лемма о сопряжённой переменной

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + u(t), \quad x \in \mathbb{E}^n. \quad (1)$$

Уравнение

$$\dot{\psi} = -A^* \psi \quad (2)$$

называется *сопряжённым уравнением для уравнения (1)*. Здесь

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

– неизвестная n -мерная векторная функция аргумента t , A^* – матрица, полученная транспонированием из матрицы A , входящей в уравнение (1). Уравнение (2) является линейным однородным. Оно, очевидно, имеет тривиальное решение $\psi = 0$ (это решение нас не интересует). Решение сопряжённого уравнения можно записать с помощью формулы Коши:

$$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0) \quad (3)$$

(вектор начальных условий задан в момент времени t_0). В силу невырожденности экспоненциала ([§ 2](#))

$$\psi(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \psi(t_0) = 0,$$

т.е. тривиальное решение $\psi(t) = 0$ уравнения (2) получаем только при нулевом начальном условии $\psi(t_0) = 0$.

Определение 9.1. Любое нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряжённого уравнения (2) будем называть *сопряжённой переменной*.

Для получения сопряжённой переменной $\psi(t)$ следует решить сопряжённое уравнение (2) с некоторым ненулевым начальным условием.

Если начальное условие задано в момент времени t_1 , то вместо формулы (3) получаем

$$\psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1). \quad (4)$$

В дальнейшем изложении существенно используется следующая лемма.

Лемма (о сопряжённой переменной)

Пусть $t_0 < t_1$, $t \in [t_0, t_1]$, $X(t) \equiv X(t_0, t, M_0)$ – множество достижимости, $Z(t) \equiv Z(t, t_1, M_1)$ – множество управляемости. Для любой сопряжённой переменной $\psi(t)$ имеют место следующие равенства

$$c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds, \quad (5)$$

$$c(Z(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t c(U, \psi(s)) ds. \quad (6)$$

Кроме того,

$$(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds, \quad (7)$$

$$(x(t), -\psi(t)) = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), \psi(s)) ds. \quad (8)$$

где $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, т.е. в формулах (7), (8) $x(t)$ – любая траектория, отвечающая управлению $u(t)$.

Доказательство

Равенства (5) – (8) устанавливаются непосредственной проверкой.

Проверим сначала равенство (7). На основании формулы Коши

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds \right), \quad \psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x(t), \psi(t)) &= (e^{(t-t_0)A} (x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds), e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} u(s) ds, \psi(t_0)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Формула (7) доказана.

Проверим формулу (8). На основании формулы Коши

$$x(t) = e^{(t-t_1)A} \left(x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-(s-t_1)A} u(s) ds \right), \quad \psi(t) = e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x(t), -\psi(t)) &= (e^{(t-t_1)A} (x(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-(s-t_1)A} u(s) ds), -e^{-(t-t_1)A^*} \psi(t_1)) = \\ &= (x(t_1), \psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), e^{-(s-t_1)A^*} \psi(t_1)) ds = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t (u(s), \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Формула (8) доказана.

Проверим теперь формулу (5). Используя формулы (5), § 8, и (3), § 9, имеем

$$c(X(t), \psi(t)) = c(X(t), \psi) |_{\psi=\psi(t)} = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds.$$

Для доказательства формулы (6) следует воспользоваться формулами (6), § 8, и (4), § 9.

Лемма о сопряжённой переменной доказана.

Замечание 9.1. Опорная функция множества достижимости $X(t)$ на сопряжённой переменной $\psi(t)$, т.е. функция

$$f(t) \equiv c(X(t), \psi(t)) = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds,$$

непрерывна по аргументу t вместе со своей производной

$$\dot{f}(t) = c(U, \psi(t)).$$

Опорная функция множества управляемости $Z(t)$ на сопряжённой переменной $\psi(t)$, т.е. функция

$$\phi(t) \equiv c(Z(t), -\psi(t)) = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_{t_1}^t c(U, \psi(s)) ds,$$

непрерывна по аргументу t вместе со своей производной

$$\dot{\phi}(t) = -c(U, \psi(t)).$$

Лекция 8

§ 10. Управляемость. Критерий управляемости. Основная лемма

В § 10 вводится понятие управляемости, рассматривается критерий управляемости. С помощью критерия управляемости доказывается так называемая основная лемма, которая будет использована при выводе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (§ 11).

Рассматривается управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + u.$$

Задан класс допустимых управлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_U$, множества M_0, M_1 ($U, M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$) и два числа $t_0, t_1; t_0 < t_1$. Поставим вопрос: можно ли при помощи какого-нибудь допустимого управления $u(s) \in \mathcal{U}$, определенного на отрезке времени $[t_0, t_1]$, перевести объект из множества M_0 на множество M_1 :

$$x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1?$$

При положительном ответе на этот вопрос говорят об *управляемости* объекта. Исследование управляемости не связано с каким-либо критерием качества процесса управления (например, с временем перехода). Отрезок времени $[t_0, t_1]$ считается заданным.

Определение 10.1. Объект называется *управляемым на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из множества M_0 в множество M_1* , если существует допустимое управление $u(s) \in \mathcal{U}$ и отвечающая этому управлению траектория $x(t)$ (т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ с начальным условием $x(t_0) \in M_0$ такая, что $x(t_1) \in M_1$.

Из определения множества достижимости ясно, что объект управляем на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 тогда и только тогда, когда множество достижимости $X(t_1) \equiv X(t_0, t_1, M_0)$ пересекается с множеством M_1 :

$$\boxed{\text{управляемость на } [t_0, t_1] \text{ из } M_0 \text{ в } M_1} \Leftrightarrow \boxed{X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \neq \emptyset}. \quad (1)$$

Так как $X(t_1), M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$, то на основании утверждения (1) и первой части [свойства 14, § 5](#), опорных функций получаем необходимое условие управляемости в форме

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{E}^n, \psi \neq 0, \quad (2)$$

которое можно переписать, заменив ψ на $\psi(t_1)$, в виде

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in \mathbb{E}^n, \psi(t_1) \neq 0. \quad (3)$$

Так как $\psi(t_1) \neq 0$, то этот ненулевой вектор в (3) можно рассматривать как значение сопряжённой переменной в момент времени t_1 . Тогда, привлекая формулу [\(5\), § 9](#), при $t = t_1$ из леммы о сопряжённой переменной, условие (3) можно переписать в форме

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s)) ds + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0, \quad (4)$$

причём это условие должно выполняться для любой сопряжённой переменной $\psi(s), \psi(s)|_{s=t_0} = \psi(t_0), \psi(s)|_{s=t_1} = \psi(t_1)$.

Итак, получено необходимое условие управляемости в форме (4) (первая часть следующей теоремы).

Теорема (критерий управляемости)

- При $M_0, M_1 \in \Omega(\mathbb{E}^n)$ условие (4) является необходимым условием управляемости объекта на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .
- При $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$ условие (4) является необходимым и достаточным условием управляемости объекта на заданном отрезке времени $[t_0, t_1]$ из M_0 в M_1 .

Доказательство

Часть 1 этой теоремы доказана выше. Для доказательства части 2 остается проверить, что в случае выпуклых компактов M_0, M_1 условие (4) влечет управляемость. Условие (4) равносильно условию (3), а условие (3) может быть записано в форме (2), т.е.

$$c(X(t_1), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n.$$

Последнее условие и выпуклость компактов $X(t_1), M_1$ на основании [следствия из свойства 14, § 5](#), влекут соотношение $X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset$, равносильное управляемости, см. (1).

Критерий управляемости установлен.

Другая формулировка критерия управляемости. Перепишем условие управляемости (4), заменив там сопряжённую переменную по формуле [\(3\), § 9](#):

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi(t_0)) ds + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A} \psi(t_0)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_0).$$

Введём функцию

$$\Phi_0(\psi) = c(M_0, \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi) ds + c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A} \psi) \quad (5)$$

(*функция управляемости*). Положим $m_0 = \min_{\psi \in S} \Phi_0(\psi)$. Ясно, что условие управляемости (4) равносильно каждому из следующих условий:

$$\Phi_0(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in E^n, \quad (6)$$

$$\Phi_0(\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S, \quad (7)$$

$$m_0 \geq 0. \quad (8)$$

Неравенства (6)-(8) являются другой формой условия управляемости (4) в терминах функции управляемости (5). Условия управляемости в форме (7), (8) удобны при рассмотрении конкретных примеров. Чтобы установить неуправляемость, достаточно указать такой вектор $\tilde{\psi} \in S$, для которого $\Phi_0(\tilde{\psi}) < 0$.

Упражнение 10.1. Записать условие управляемости в терминах функции управляемости

$$\Phi_1(\psi) = c(M_0, e^{-(t_1-t_0)A} \psi) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, e^{-(t-t_0)A} \psi) ds + c(M_1, -\psi). \quad (9)$$

Какая связь существует между функциями управляемости (5) и (9)?

Пример 10.1. Пусть $n = 2$, $t_0 = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = S_1^+(0)$, $M_0 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $M_1 = S_\pi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Исследовать управляемость объекта из M_0 в M_1 на отрезках

- $[0, \frac{\pi}{2}]$,
- $[0, \pi]$,
- $[0, 2\pi]$.

Решение

Множества M_0, M_1 (рис. 10.1) – выпуклые компакты, и условие (8) является необходимым и достаточным условием

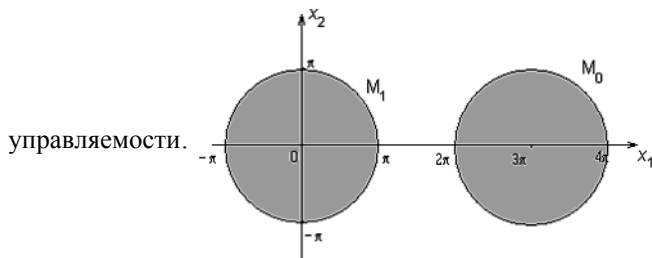


Рис. 10.1.

Для решения вопроса об управляемости найдём функцию управляемости $\Phi_0(\psi)$ на отрезке $[0, t_1]$. Имеем

$$c(M_0, \psi) = 3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|, \quad c(M_1, \psi) = \pi \|\psi\|, \quad c(U, \psi) = \|\psi\|$$

$$e^{-(t-t_0)A} = e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

$$c(U, e^{-(t-t_0)A^*} \psi) = \|e^{-tA^*} \psi\| = \|\psi\|$$

$$c(M_1, -e^{-(t_1-t_0)A^*} \psi) = \pi \|e^{-t_1 A^*} \psi\| = \pi \|\psi\|.$$

Находим теперь функцию управляемости (5)

$$\Phi_0(\psi) = (3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|) + \int_0^{t_1} \|\psi\| ds + \pi \|\psi\| = 3\pi\psi_1 + (2\pi + t_1) \|\psi\|$$

и число

$$m_0 = \min_{\|\psi\|=1} \Phi_0(\psi) = t_1 - \pi.$$

Условие управляемости (8) принимает вид

$$t_1 - \pi \geq 0.$$

Таким образом, на отрезке $[0, t_1]$ объект управляем при $t_1 \geq \pi$ и неуправляем при $0 < t_1 < \pi$. В частности, на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ объект неуправляем, а на отрезках $[0, \pi], [0, 2\pi]$ объект управляем.

В примере 10.1 вопрос об управляемости был решен аналитическими средствами на основе критерия управляемости. Чтобы выяснить геометрические причины управляемости или неуправляемости на данном отрезке, мы в примере 10.2 изучим динамику множества достижимости $X(t) = X(0, t, M_0)$ объекта из примера 10.1.

Пример 10.2. Найти множество достижимости $X(t)$ для объекта из примера 10.1 в произвольный момент времени $t \geq 0$.

Привлекая формулу (5), § 8, ($t_0 = 0$)

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{tA} \psi) + \int_0^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds. \quad (10)$$

найдем опорную функцию множества достижимости $X(t)$. Имеем

$$c(M_0, \psi) = 3\pi\psi_1 + \pi \|\psi\|,$$

$$e^{tA} \psi = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \cos t - \psi_2 \sin t \\ \psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

$$c(M_0, e^{tA} \psi) = 3\pi(\psi_1 \cos t - \psi_2 \sin t) + \pi \|e^{tA} \psi\| = (3\pi \cos t)\psi_1 + (-3\pi \sin t)\psi_2 + \pi \|\psi\|. \quad (11)$$

$$\int_0^t c(U, e^{(t-s)A} \psi) ds = t \|\psi\|. \quad (12)$$

Тогда подстановка (11), (12) в (10) даёт

$$c(X(t), \psi) = (3\pi \cos t)\psi_1 + (-3\pi \sin t)\psi_2 + (\pi + t) \|\psi\| = c(S_{r(t)}(a(t)), \psi), \quad (13)$$

где $r(t) = \pi + t$, $a(t) = 3\pi \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$. Из (13) следует, что

$$X(t) = S_{r(t)}(a(t)),$$

т.е. множество достижимости $X(t)$ является кругом радиуса $r(t) = \pi + t$, центр которого $a(t)$ движется по окружности радиуса 3π в направлении вращения часовой стрелки (рис. 10.2).

Ясно, что

$$X(t)|_{t=0} = S_{\pi} \begin{pmatrix} 3\pi \\ 0 \end{pmatrix} = M_0, \quad X(t)|_{t=\frac{\pi}{2}} = S_{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3\pi \end{pmatrix}, \quad X(t)|_{t=\pi} = S_{2\pi} \begin{pmatrix} -3\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

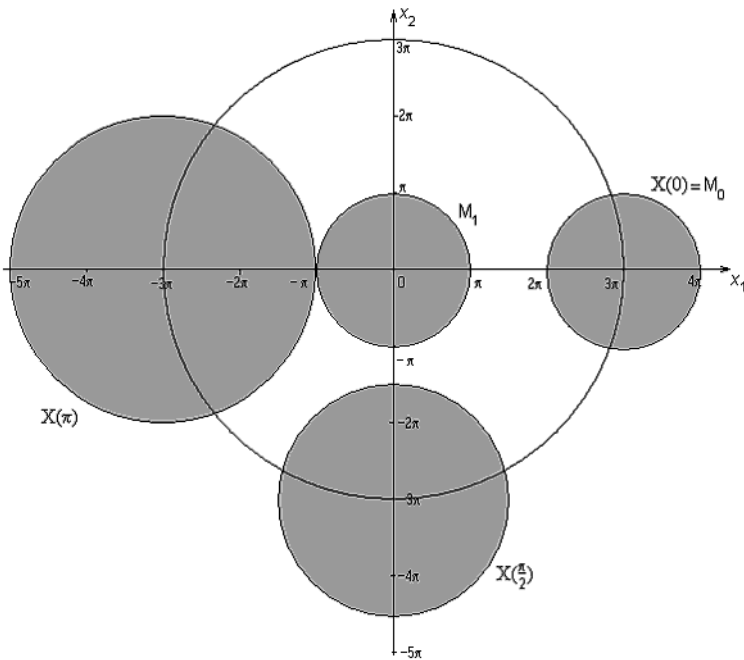


Рисунок 10.2.

При $0 < t < \pi$ множество достижимости $X(t)$ не пересекается с множеством M_1 (что соответствует неуправляемости объекта на отрезке $[0, t], 0 < t < \pi$). В момент времени $t = \pi$ возникает первый контакт множества достижимости с множеством M_1 в точке $(-\pi, 0)$ (время $\pi - 0$ – минимальное время перехода из M_0 в M_1 , т.е. время быстрогодействия). При всех $t \geq \pi$ множество $X(t)$ пересекается с M_1 , что соответствует управляемости объекта на любом отрезке $[0, t]$, где $t \geq \pi$.

Упражнение 10.2. Построить множества $X(\frac{3\pi}{2}), X(2\pi), X(3\pi)$.

Упражнение 10.3. Построить множество управляемости $Z(t) = Z(t, \pi, M_1), 0 \leq t \leq \pi$. Показать, что $Z(t) = S_{2\pi-t}(0)$. Установить взаимное расположение множеств $X(t)$ и $Z(t)$ при $0 \leq t \leq \pi$.

Рассмотрим множества $X(\pi)$ и M_1 , имеющие одну общую точку $(-\pi, 0)$. Для этих множеств должно выполняться условие управляемости

$$c(X(\pi), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in S. \quad (14)$$

Это условие можно проверить непосредственно:

$$c(X(\pi), \psi) = -3\pi\psi_1 + 2\pi \|\psi\|,$$

$$c(M_1, -\psi) = \pi \|\psi\|,$$

$$c(X(\pi), \psi) + c(M_1, -\psi) = -3\pi\psi_1 + 2\pi \|\psi\| + \pi \|\psi\| = 3\pi(\|\psi\| - \psi_1) \geq 0 \quad \forall \psi \in S.$$

Обратим внимание на то, что для единичного вектора

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

выполняется равенство

$$c(X(\pi), \bar{\psi}) + c(M_1, -\bar{\psi}) = 0. \quad (15)$$

т.е. неравенство (14) при $\psi = \bar{\psi}$ превращается в равенство. Вектор $\bar{\psi}$, для которого выполнено равенство (15), имеет простой

геометрический смысл (рис. 10.3):

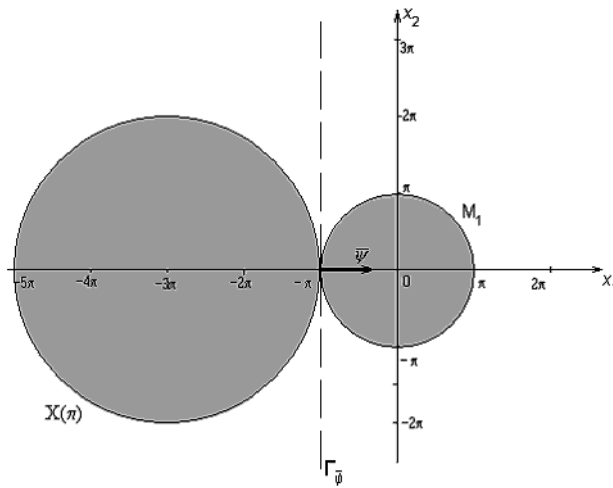


Рисунок 10.3.

$\bar{\psi}$ – вектор нормали к гиперплоскости $\Gamma_{\bar{\psi}}$ (прямой, проходящей через общую точку $(-\pi, 0)$ множеств $X(\pi)$ и M_1), которая "разделяет" множества $X(\pi)$ и M_1 . Напомним, что в рассматриваемом примере момент времени $t = \pi$ есть первый момент касания множества достижимости $X(t)$ с множеством конечных состояний M_1 .

Лемма (основная)

Пусть

$$1. M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n);$$

2. $t_1 - t_0 = \min$, т.е. $t_1 - t_0$ – оптимальное время перехода из M_0 в M_1 в рассматриваемой задаче быстрогодействия

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(t_1) \in M_1.$$

Тогда существует такая сопряжённая переменная $\psi(t)$, для которой в условии управляемости реализуется знак равенства:

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0,$$

или, в более подробной записи,

$$c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} c(U, \psi(s)) ds + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0.$$

Доказательство

По условию основной леммы

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset, \quad (16)$$

$$X(t) \cap M_1 = \emptyset \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (17)$$

Условие (16) на основании [теоремы об управляемости](#) (часть 2) равносильно условию

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) \geq 0 \quad \forall \psi(t_1) \in S. \quad (18)$$

Рассмотрим последовательность $\{t^k\}, t_0 < t^k < t_1; t^k \rightarrow t_1 - 0$ при $k \rightarrow \infty$. из (17) следует, что

$$X(t^k) \cap M_1 = \emptyset \quad \forall k. \quad (19)$$

Так как $X(t^k), M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$, то из (19) в силу следствия из [свойства 14, § 5](#),

$$\forall k \quad \exists p^k \in S: \quad c(X(t^k), p^k) + c(M_1, -p^k) < 0. \quad (20)$$

Из последовательности $\{p^k\}$ единичных векторов выберем сходящуюся к некоторому вектору $p_* \in S$ подпоследовательность; не изменяя обозначений, будем считать, что $p^k \rightarrow p_*$ при $k \rightarrow \infty$. Используя непрерывность опорной функции по совокупности двух аргументов, непрерывную зависимость множества достижимости $X(t)$ от t , предельные соотношения $t^k \rightarrow t_1, p^k \rightarrow p_*$ ($k \rightarrow \infty$) и выполняя в (20) переход к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \leq 0. \quad (21)$$

Полагая в (18) $\psi(t_1) = p_*$, запишем неравенство

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) \geq 0. \quad (22)$$

Сравнение (21) с (22) приводит к равенству

$$c(X(t_1), p_*) + c(M_1, -p_*) = 0, \quad p_* \in S,$$

которое доказывает утверждение основной леммы с сопряжённой переменной $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\psi(t_1) = p_*$.

Основная лемма доказана.

Выше мы проиллюстрировали утверждение основной леммы на конкретном примере. В § 11 основная лемма будет использована при доказательстве теоремы о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Упражнение 10.4. Показать, что утверждение основной леммы без предположения о выпуклости компактов M_0 и M_1 неверно. Рассмотреть пример

$$n = 2, A = 0, t_0 = 0, M_0 = \{0\}, U = S_1(0), M_1 = \begin{pmatrix} (-1, 0) \\ (1, 0) \end{pmatrix}, t_1 = 1.$$

Замечание 10.1. Анализ доказательства основной леммы показывает, что её второе условие можно заменить следующим: существует последовательность $\{t^k\}$, сходящаяся к t_1 , такая, что

$$X(t_1) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t^k) \cap M_1 = \emptyset \quad \forall k.$$

Это замечание объясняет, почему принцип максимума Понтрягина, доказательство которого опирается на основную лемму, является только необходимым условием оптимальности, но в общем случае не является достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстрого действия. Геометрическая идея построения соответствующих примеров связана с тем, что множество достижимости $X(t)$ может (после первого момента t_1 встречи с M_1) оторваться от множества M_1 в некоторый момент $t = t_2 > t_1$

$$(\text{при этом } X(t_2) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при малых } t - t_2 > 0);$$

впоследствии при некотором $t = t_3 > t_2$ может произойти повторная встреча множества достижимости $X(t)$ с M_1

$$(X(t_3) \cap M_1 \neq \emptyset, X(t) \cap M_1 = \emptyset \text{ при малых } t - t_3 < 0).$$

В таких ситуациях на отрезках $[t_0, t_1], [t_0, t_2], [t_0, t_3]$ в случае выпуклости компактов M_0, M_1 имеет место утверждение основной леммы.

Упражнение 10.5. Проиллюстрировать замечание 10.1 конкретными примерами.

Лекция 9

§ 11. Принцип максимума Понтрягина. Теорема о необходимых условиях оптимальности в линейной задаче быстрогодействия

11.1. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \\ x(t_0) \in M_0, \\ x(t_1) \in M_1, \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

определяемую набором исходных данных $\{A, M_0, M_1, \mathcal{U} = \mathcal{U}_{U, t_0}\}$. Напомним, что $M_0, M_1, U \in \Omega(\mathbb{E}^n)$. Изучим сейчас основной вопрос нашего курса – *теорему о необходимых условиях оптимальности* для линейной задачи быстрогодействия (1) (*принцип максимума Понтрягина*). При доказательстве этой теоремы существенно используется [основная лемма](#), доказанная в § 10.

11.2. Основная лемма.

В случае $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n), t_1 - t_0 = \min$ существует сопряжённая переменная $\psi(t)$, для которой выполняется равенство

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0. \quad (2)$$

11.3. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим пару

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где

- $u(t) \in \mathcal{U}$, т.е. $u(t)$ – допустимое управление, определённое на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, причём в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ значение $u(t) \in U$,
- $x(t)$ – траектория, отвечающая управлению $u(t)$, т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$, и удовлетворяющая краевым условиям $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$.

Будем говорить, что эта пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$, если существует такая сопряжённая переменная $\psi(t)$ (ненулевое решение сопряжённого уравнения $\dot{\psi} = -A^*\psi$), что выполнены следующие три условия:

- $(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t))$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ (*условие максимума*),
- $(x(t_0), \psi(t_0)) = c(M_0, \psi(t_0))$ (*условие трансверсальности на множестве M_0*),
- $(x(t_1), -\psi(t_1)) = c(M_1, -\psi(t_1))$ (*условие трансверсальности на множестве M_1*),

Геометрический смысл условий а), б), в) указан на рис. 11.1.

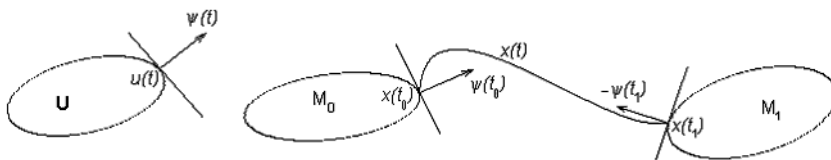


Рисунок 11.1.

Содержанием настоящего п.11.3 является введение терминологии, разъясняющей, что подразумевается, когда мы говорим, что "пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ ".

11.4. Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Теорема (о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина)

Пусть

- $M_0, M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n)$,
- пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, решает линейную задачу быстрогодействия (1), т.е. $u(t) \in \mathcal{U}$, $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$, $t_1 - t_0 = \min$.

Тогда пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$.

Структура сформулированной теоремы отображена на рис.11.2.



Рисунок 11.2.

Доказательство

По условиям теоремы

$$X(t_1) \equiv X(t_0, t_1, M_0), \quad M_1 \in \text{conv } \Omega(\mathbb{E}^n),$$

$$t_1 - t_0 = \min, \quad X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \neq \emptyset.$$

В соответствии с основной леммой существует сопряжённая переменная $\psi(t)$, с которой выполнено равенство (2):

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) + c(M_1, -\psi(t_1)) = 0,$$

где $X(t_1) = X(t_0, t_1, M_0)$ – множество достижимости. Покажем, что с этой же сопряжённой переменной $\psi(t)$ выполняются условия а), б), в) принципа максимума Понтрягина.

Вычитая из (2) почленно очевидное равенство

$$(x(t_1), \psi(t_1)) + (x(t_1), -\psi(t_1)) = 0,$$

получаем

$$[c(X(t_1), \psi(t_1)) - (x(t_1), \psi(t_1))] + [c(M_1, -\psi(t_1)) - (x(t_1), -\psi(t_1))] = 0. \quad (3)$$

Каждая из двух разностей в левой части (3) неотрицательна; это следует из определения опорной функции и соотношений $x(t_1) \in X(t_1)$, $x(t_1) \in M_1$. Поэтому каждая из этих разностей равна нулю, т.е.

$$c(M_1, -\psi(t_1)) - (x(t_1), -\psi(t_1)) = 0, \quad (4)$$

$$c(X(t_1), \psi(t_1)) - (x(t_1), \psi(t_1)) = 0. \quad (5)$$

Равенство (4) доказывает справедливость условия в) принципа максимума Понтрягина (условие трансверсальности на множестве M_1). Покажем теперь, что равенство (5) влечет выполнение условий а), б) принципа максимума Понтрягина.

Используя лемму о сопряжённой переменной (§ 10, формулы (5) и (7) при $t = t_1$), запишем условие (5) в форме

$$[c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0))] + \int_{t_0}^{t_1} [c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds = 0. \quad (6)$$

Так как $x(t_0) \in M_0$, то

$$c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0)) \geq 0; \quad (7)$$

так как $u(s) \in \mathcal{U}$, $s \in [t_0, t_1]$, то

$$c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s)) \geq 0, \quad (8)$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(\mathcal{U}, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds \geq 0. \quad (9)$$

Из (6), (7) и (9) следуют равенства

$$c(M_0, \psi(t_0)) - (x(t_0), \psi(t_0)) = 0, \quad (10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds = 0. \quad (11)$$

Равенство (10) равносильно условию б) принципа максимума Понтрягина (условию трансверсальности на множестве M_0). Из условий (11) и (8) следует, что

$$c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s)) = 0 \text{ для почти всех } s \in [t_0, t_1].$$

Последнее утверждение доказывает условие а) принципа максимума Понтрягина (условие максимума).

11.5. Лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина в терминах множеств достижимости $X(t)$ и управляемости $Z(t)$. Геометрическая интерпретация сопряжённой переменной $\psi(t)$

В этом пункте мы не будем предполагать оптимальности пары $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$, и выпуклости компактов M_0, M_1 .

Лемма

Пусть $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$. Равносильны следующие два условия:

I) Пара $(x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с сопряжённой переменной $\psi(t)$.

II) Выполняются равенства

$$(x(t), \psi(t)) = c(X(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (12)$$

$$(x(t), -\psi(t)) = c(Z(t), -\psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (13)$$

с сопряжённой переменной $\psi(t)$.

Здесь

$X(t) = X(t_0, t, M_0)$ – множество достижимости,

$Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$ – множество управляемости,

$\psi(t)$ – сопряжённая переменная (в каждом из условий участвует одна и та же сопряжённая переменная).

Доказательство

Проверим сначала, что условие I влечет условие II. Пусть выполнено условие I. Тогда

$$c(X(t), \psi(t)) = \{ \text{Формула (5), § 9} \} = c(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t c(U, \psi(s)) ds = \{ \text{Условие I, а), б)} \} = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int_{t_0}^t (u(s), \psi(s)) ds = \{ \text{Формула (7), § 9} \} = (x(t), \psi(t)),$$

т.е. доказано равенство (12). Равенство (13) доказывается совершенно аналогично с помощью леммы о сопряжённой переменной:

$$\begin{aligned} c(Z(t), -\psi(t)) &= \{ \text{формула 6, § 9} \} = c(M_1, -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} c(U, \psi(s)) ds = \{ \text{Условие I а), б)} \} = \\ &= (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int_t^{t_1} (u(s), \psi(s)) ds = \{ \text{формула 8, § 9} \} = (x(t), -\psi(t)) \end{aligned}$$

Проверим теперь, что условие II влечет условие I. Пусть выполнено условие II; полагая в (12) $t = t_0$ и в (13) $t = t_1$, получаем условия трансверсальности принципа максимума Понтрягина; используя (12) и выполняя почленное вычитание формул (5) и (7), § 9, получаем

$$0 = 0 + \int_{t_0}^t [c(U, \psi(s)) - (u(s), \psi(s))] ds, \quad t \in [t_0, t_1];$$

выполнив здесь дифференцирование по аргументу t , приходим к соотношению

$$c(U, \psi(t)) - (u(t), \psi(t)) = 0 \text{ для почти всех } t \in [t_0, t_1],$$

т.е. к условию максимума а) принципа максимума Понтрягина.

Равенства (12), (13) позволяют дать геометрическую интерпретацию сопряжённой переменной с привлечением множеств $X(t)$ и $Z(t)$. Пусть пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ с сопряжённой переменной $\psi(t)$. Рассмотрим гиперплоскость

$$\Gamma_{\psi(t)} = \{y \in E^n : (y - x(t), \psi(t)) = 0\},$$

вектором нормали которой служит сопряжённая переменная $\psi(t)$. Точка $x(t)$ принадлежит каждому из множеств $X(t)$, $Z(t)$, $\Gamma_{\psi(t)}$. Гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}$ в каждый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ разделяет множества достижимости $X(t)$ и управляемости $Z(t)$,

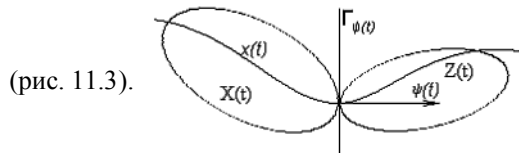


Рисунок 11.3.

Упражнение 11.1. Пусть пара $(x(t), u(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке $[t_0, t_1]$ с сопряжённой переменной $\psi(t)$. Доказать, что гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}$ разделяет множества $X(t)$ и $Z(t)$, т.е.

$$\forall \xi \in X(t) : (\xi - x(t), \psi(t)) \leq 0,$$

$$\forall \zeta \in Z(t) : (\zeta - x(t), -\psi(t)) \leq 0,$$

(рис. 11.4).

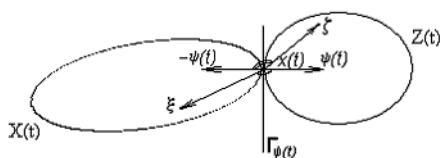


Рисунок 11.4.

